多复变数函数論中的典型域的调和分析

华 罗 庚

科 学 出 版 社

1 9 5 8

內容提要

作者自1952年以来在多复变数函数論方面发表过許多論文，本書包括这些論文的主要結果及一些尙未发表的結果。

在第一章中，証明了一系列的恆等式；第二章是关于矩陣积分的計算；第三章是方陣极坐标表示法及特征流形的体积的計算；第四章是关于核函数及Cauchy公式；第五章是矩陣双曲空間的調和分析；第六章是对称及斜对称方陣双曲空間的調和分析；第七章是超球双曲空間的調和分析。

多复变数函数論中的典型域的調和分析

著者 华罗庚

出版者 科学出版社
北京朝阳門大街117号
北京市書刊出版业营业許可証出字第051号

印刷者 中国科学院印刷厂

总經售 新华書店

1958年9月第一版　　書号：1404
1958年9月第一次印刷　　字数：167,000
(京) 道精：1—770　　开本：787×1092 1/18
　　 報平：1—2,550　　印张：7 插頁：2

定价：(10) 道林精装本 2.70元
　　　　　 报紙平装本 1.20元

序

本书包括了作者对多复变数函数論的一部分系統的研究，其主要部分先后（从1949年至1955年）发表在我国的"数学学报"上(一些初步报告发表在"苏联科学院报告"上)．除綜合、改組、增补、修訂的工作之外，还包括了一些新結果．

初稿曾在1955年的中国科学院第一次学部会議上书面宣讀，1956年曾在第三屆全苏数学会上宣讀．

这一系列的工作在某种意义上可以說是完整的．但是从1957年初，另外一些綫索又在开始发展，那就是与調和函数有关的、与偏微分方程有关的、与羣表示論有关的各方面，并且已經完成了若干工作．其中很大一部分是和陸启鏗同志合作的．为了将来再准备出专集，本书中将不包括与那些有关的部分．

作者尽量設法使本书自給自足，除掉羣表示論的知識以外，并不需要太多的专門知識．

作者乘此感謝陸启鏗同志，他提了很多意見，指出了不少应当改善和修正的地方．龔昇、鍾同德二位同志的意見和帮助也使本书有所改进，一併致謝．

华罗庚 1957年5月·北京

目　　録

导 言

§1. 典型域

本文中所討論的典型域是指以下的四种域:

第一种是 m 行 n 列的矩陣双曲空間,今后以 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 表示. 它是由 m 行 n 列的复元素矩陣 Z 之适合于条件

$$I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0$$

者所組成,此处 $I^{(m)}$ 表示 m 行列的单位方陣, $\bar{Z}'$ 表示由 Z 行列互换并取共軛复数所得出的矩陣,因此它是 n 行 m 列的. 如果 H 是一个 Hermite 方陣, 則以 $H > 0$ 表示 H 是定正的.

第二种是 n 行列的对称方陣的双曲空間, 今后以 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 表示. 它是由 n 行列的复元素对称方陣 Z 之适合于条件

$$I^{(n)} - Z\bar{Z} > 0$$

者所組成.

第三种是 n 行列的斜对称方陣的双曲空間, 今后以 $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 表示. 它是由 n 行列的复元素斜对称方陣 Z 之适合于条件

$$I^{(n)} + Z\bar{Z} > 0$$

者所組成.

第四种可以称为 Lie 球双曲空間,今后以 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 表示. 它是由 $n(>2)$ 維复元素矢量 $z(=(z_1, \cdots, z_n))$ 之适合于諸条件

$$|zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0$$

及

$$|zz'| < 1$$

者所組成.

这四种域的維数(复数維)各为 mn, $\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{2}n(n-1)$ 及 n. 最后一种, 作者曾經証明(华罗庚[3])它也可以表成为 $2 \times n$ 实元素矩陣的双曲空間. 因此这四种域都可以归入作者所研究过的矩陣几何的范畴之中.

1935 年 E. Cartan [1] 曾經算出:可递的不可分解的囿对称域仅有六种可能性. 除以上的四种之外还有两种,其一是 16 維的某一种空間,另一是 27 維的某一种空間. 从維数可以看出这两种域是异常特殊的. 后經 A. Borel [1] 指出, 具体有效地定出这两种域还是問題. 因此一般說来,以上所提出的四种域在具体地研究多变数函数論时,是有它的特殊重要意义的, 于是仿典型羣的名称我們称它們为典型域. 本文的目的就在于具体地研究这些典型域的調和分析問題.

§2. 域內的正常正交系

以 z 代表 n 个复变数所成的矢量；$\mathfrak{R}$ 代表这 n 維复空間的一个簡单域．适合于

$$\int_{\mathfrak{R}} |f(z)|^2 \dot{z} < \infty$$

的在 $\mathfrak{R}$ 內解析的函数 $f(z)$ 成一类，以 B^2 表之，此处积分过域 $\mathfrak{R}$ 的全部，$\dot{z} = \prod_{k=1}^{n} (dx_k\, dy_k)$，而 $z = (z_1, \cdots, z_n)$，$z_k = x_k + i y_k$．S. Bergmann [1] 曾經証明：B^2 中有一完整正常正交系存在（关于証明可参考 Фукс [1]），即 B^2 中有一函数貫

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \cdots,\ \varphi_\nu(z),\ \cdots$$

存在，使

$$\int_{\mathfrak{R}} \varphi_\nu(z)\, \overline{\varphi_\mu(z)}\, \dot{z} = \begin{cases} 1, & 若\ \nu = \mu, \\ 0, & 若\ \nu \neq \mu; \end{cases}$$

且若对所有的 ν 常有

$$\int_{\mathfrak{R}} f(z)\, \overline{\varphi_\nu(z)}\, \dot{z} = 0, \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots,$$

則 B^2 中的解析函数 $f(z)$ 恆等于 0．虽然有这样一般性的定理，但对一实际域来具体定出一个完整正常正交系并不簡单．本文的目的之一在于給与具体方法定出典型域中的完整正常正交系．

§3. 羣表示論的一个問題

习知，这四类典型域都是圓型域．不同次数的多項式是相互正交的，所以我們的主要考驗在于把同次数的多項式分解为相互正交的系．更清楚些，命 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 表一矢量，$z^{[l]}$ 表以

$$z_1^{l_1} \cdots z_n^{l_n} \sqrt{\frac{l!}{l_1!\, l_2! \cdots l_n!}}, \qquad l = l_1 + \cdots + l_n$$

为支量的矢量，这矢量的維数是

$$\frac{1}{l!} n(n+1) \cdots (n+l-1);$$

命

$$w = zU + 次数大于 1 的項$$

表一把 $\mathfrak{R}$ 变为其自己且使原点不变的变形，此 U 成一 n 行列方陣的羣，此羣也以 U 代表．在 $z^{[l]}$ 上引出了一个变形，它的綫性部分的方陣 $U^{[l]}$ 是 U 的一个表示，这是羣 U 的 l 次冪积 (Kronecker's power product)．把 $U^{[l]}$ 分解为不可化的支量，对应地分解了綫性空間 $z^{[l]}$．在这样的考虑之下，我們引出了以下的与羣表示論有关的問題．

从 n 行列的一般綫性羣 GL_n 出发，命 $f_1, \cdots, f_n$ 代表 n 个整数，并适合于

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0.$$

对 GL_n 中的一个元素 X，在 GL_n 的标签为 $(f_1, \cdots, f_n)$ 的表示法中，有对应元素

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(X),$$

它的行列数通常用 $N(f_1, \cdots, f_n)$ 表示．我們已經知道，它是一个不可分解的表示法．如又有一个羣 GL_N 的表示法

$$B_{g_1,\cdots,g_N}(Y),$$

显然

$$B_{g_1,\cdots,g_N}(A_{f_1,\cdots,f_n}(X))$$

仍然是 GL_n 的一种表示法．我們現在所提的問題是以上的羣表示可以分解为那些不可分解的直和．这个一般性的問題本身是一个有趣的代数問題，本文中未能完全地解决它．但僥倖的是本文所用到的一些特例[1]确已完滿地解决了．

§ 4. 方陣的极坐标

在运用羣表示的方法获得了正交系之后，我們又遇到另一个困难問題，就是具体地算出正常化系数的問題．为了这个目的，在进行具体計算时，引进了一个工具，我們称它为方陣的极坐标．例如，我們已知任一复元素的对称方陣 Z 可以表成为

$$Z = U \Lambda U'$$

（华罗庚[1]），此处 U 表示酉方陣，Λ 表示对角綫方陣，其对角綫上的元素是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，且适合于 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$．命 $\{\mathfrak{U}\}$ 表酉羣对其子羣 $[\pm 1, \cdots, \pm 1]$ 的傍系，則一般說来，一对称方陣 Z 与 $\{\mathfrak{U}\}$ 中的一元素及一个 Λ 是一一对应的．这方陣 Λ 可以称为 Z 的向径，而 U 可以称为輻角部分．关于由 Z 到它的极坐标之間的具体計算关系（如函数行列式等），在本文中都已算出．本文中并列出若干虽与本文主題无直接关系但属于同一范畴的一些与矩陣极坐标有关的运算．

§ 5. 积分的具体算出

一些积分的具体算出也是本文中的一个环节，例如我們算出了所有的四种域的欧几里得体积，这些公式不在緒言中一一枚举．但我們必須提出其中的一个，即我們算出了：当 $\alpha > -1$，$\alpha + \beta > -n$ 时，

$$\int_{\mathfrak{R}_{IV}} (1 - \bar{z} z' - \sqrt{(\bar{z} z')^2 - |z z'|^2})^{\alpha} (1 - \bar{z} z' + \sqrt{(\bar{z} z')^2 - |z z'|^2})^{\beta} \dot{z} = \frac{\pi^n \Gamma(\alpha + 1)}{2^{n-1}(\alpha + \beta + n)\Gamma(\alpha + n)}.$$

从这一积分可以得到当 $\lambda < 1$ 时，

$$\int_{\mathfrak{R}_{IV}} (1 - 2 \bar{z} z' + |z z'|^2)^{-\lambda} \dot{z} = \frac{\pi^n \Gamma(1 - \lambda)}{2^{n-1}(n - 2\lambda)\Gamma(n - \lambda)}.$$

1) 在作者获得这些結果以后，段学复教授指出，Thrall (Thrall [1]) 也曾得出这一結果，但他所用的方法与本書中所用的方法完全不同．特此致謝．

这解决了作者在 1946 年所提出的一个問題，即在 $\mathfrak{R}_{IV}$ 域中 Poincaré 級数的收斂指数 $\geqslant 1-\frac{1}{n}$，并且这是最好的結果.

§ 6. 特征流形

关于特征流形有两种定义：一是由极大值原理出发的；另一是由决定性出发的. 换言之,特征流形 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{R}$ 域的边界上的一部分. 前者是說,凡 $\mathfrak{R}$ 內的解析函数都在 $\mathfrak{C}$ 上取极大絕对值,并且对 $\mathfrak{C}$ 上的任一点, $\mathfrak{R}$ 中一定有一解析函数在該点取极大值. 后者是說,一个 $\mathfrak{R}$ 內的解析函数,如果已知它在 $\mathfrak{C}$ 上的值,那么它就唯一决定了. 不难証明,前者的性質包括后者的性質;前者所定义的流形是唯一的,而后者不一定. 我們可以提出适合于后者而不适合于前者的例. 今后我們所指的特征流形是专指由极大值原理出发的情况.

現在我們列举典型域的特征流形.

域 $\mathfrak{R}_I$ 的边界上适合于 $Z\bar{Z}'=I$ 的矩陣 Z 成一特征流形 $\mathfrak{C}_I$. 当 $m=n$ 时, $\mathfrak{C}_I$ 是由所有的 n 行列的酉方陣所获得的, $\mathfrak{C}_I$ 的实維数等于 $n^2-(n-m)^2=m(2n-m)$ (今假定 $n\geqslant m$).

域 $\mathfrak{R}_{II}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_{II}$ 是适合于 $Z\bar{Z}=I$ 的对称方陣所成的流形. $\mathfrak{C}_{II}$ 的实維数等于 $\frac{1}{2}n(n+1)$.

域 $\mathfrak{R}_{III}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_{III}$ 的写出稍为困难；若 n 是偶数，它就是所有斜对称酉方陣所成的集合，它的实維数是 $\frac{1}{2}n(n-1)$；若 n 是奇数，它就是由形如

$$UDU'$$

的斜对称方陣所組成的集合,此处 U 过所有酉方陣而

$$D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\dotplus 0,$$

它的实維数是 $\frac{1}{2}n(n+1)-1$.

域 $\mathfrak{R}_{IV}$ 的特征流形是由形如

$$e^{i\theta}(x_1,\cdots,x_n)$$

的矢量所組成的,此处 $(x_1,\cdots,x_n)$ 中的 $x_1,\cdots,x_n$ 都是实数,且适合于

$$x_1^2+\cdots+x_n^2=1 .$$

在特征域上也有它的一組正常正交函数系. 这些流形 $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_I,\cdots,\mathfrak{C}_{IV})$ 都是一种齐性空間 (Homogeneous space), 且可由域 $\mathfrak{R}$ 的零点稳定擊变 $\mathfrak{C}$ 的一点为另一点. 关于齐性空間已有一般性的理論(如 E. Cartan [1], H. Weyl [1], A. Weil [1]), 但本文的着眼点如 §§ 2—3 所述,在于具体算出其上的正常正交系,当然也遭遇到同样的困难.

§ 7. Cauchy 公式及 Poisson 公式

和上一問題有联带关系的是 Cauchy 公式及 Poisson 公式. 提綱挈領地說：在 $\mathfrak{R}$ 內有

一完整正常正交函数組

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \cdots,\ \varphi_\nu(z),\ \cdots,$$

这一組可用如次的取法使当 $\nu \neq \mu$ 时，

$$\int_{\mathfrak{C}} \varphi_\nu(\xi)\, \overline{\varphi_\mu(\xi)}\, \dot{\xi} = 0.$$

命

$$\int_{\mathfrak{C}} |\varphi_\nu(\xi)|^2 \dot{\xi} = \rho_\nu$$

及

$$H(z,\bar{\xi}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(z)\, \overline{\varphi_\nu(\xi)}}{\rho_\nu},$$

则 Cauchy 公式的形式是

$$f(z) = \int_{\mathfrak{C}} H(z,\bar{\xi})\, f(\xi) \dot{\xi}.$$

这一公式当然对 $\mathfrak{R}_{\rm I}$, $\mathfrak{R}_{\rm II}$, $\mathfrak{R}_{\rm III}$, $\mathfrak{R}_{\rm IV}$ 都是正确的，我們还証明了一些更一般的結果．在 Cauchy 公式中命 $f(z) = u(z)\, H(\bar{w},z)$，則可以得到

$$u(z)\, H(\bar{w},z) = \int_{\mathfrak{C}} H(z,\bar{\xi})\, u(\xi)\, H(\bar{w},\xi)\, \dot{\xi},$$

取 $w = z$，卽得 Poisson 公式：

$$u(z) = \int_{\mathfrak{C}} \frac{H(z,\bar{\xi})\, H(\bar{z},\xi)}{H(z,\bar{z})}\, u(\xi)\, \dot{\xi}.$$

对于在 $\mathfrak{R}$ 的閉包上解析的函数 $u(z)$，上式成立．但有了这一公式，我們就不一定要假定 $u(z)$ 是解析的了．我們可以定义：对于任一在 $\mathfrak{C}$ 上連續的函数 $u(\xi)$，由 Poisson 积分就定义出一个函数，称为 $\mathfrak{R}$ 域的調和函数．

因此建議出典型域上的調和函数的研究，当然这并不是 $\mathfrak{R}$ 域的調和函数的最好定义．我們应当找出偏微分方程来刻划这种調和函数，并且解决相应的 Dirichlet 問題．本书仅在第五章中略提一下，詳尽的研究将見于华罗庚、陸启鏗[2]合作的工作中．

第一章

若干代數工具

§ 1.1. 代數恆等式

假定 $n\geqslant 2$, 命

$$D(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j).$$

定理 1.1.1. 我們有恆等式

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\delta^{1,\cdots,n}_{i_1,\cdots,i_n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}^2)(1-x_{i_1}^2x_{i_2}^2)\cdots(1-x_{i_1}^2x_{i_2}^2\cdots x_{i_n}^2)}$$

$$=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-x_ix_j)},\tag{1.1.1}$$

此处 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 乃由 $1,2,\cdots,n$ 之排列而得. 若 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的偶排列,則 $\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=1$; 若是奇排列,則 $\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=-1$.

定理 1.1.2. 命 $v=\left[\frac{1}{2}n\right]$, 我們有恆等式

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\delta^{1,\cdots,n}_{i_1,\cdots,i_n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\cdots(1-x_{i_1}\cdots x_{i_{2v}})}$$

$$=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)}.\tag{1.1.2}$$

在証明以上两个代数恆等式的时候,我們需要一些与 Vandermonde 行列式有关的不难証明的結果. 习知

$$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\begin{vmatrix}1, & 1, & \cdots, & 1\\ x_1, & x_2, & \cdots, & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \cdots, & x_n^{n-1}\end{vmatrix}.\tag{1.1.3}$$

命 $D_i=D(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)$, 不难証明

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^lD_i=\begin{cases}D(x_1,\cdots,x_n), & 若\ l=0,\\ 0, & 若\ 1\leqslant l\leqslant n-1,\\ (-1)^{n-1}D(x_1,\cdots,x_n)x_1,\cdots,x_n, & 若\ l=n.\end{cases}\tag{1.1.4}$$

又由于

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{1-x_1}, & \frac{x_2}{1-x_2}, & \cdots, & \frac{x_n}{1-x_n} \\ x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \cdots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)} \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ x_1(1-x_1), & x_2(1-x_2), & \cdots, & x_n(1-x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}(1-x_1), & x_2^{n-1}(1-x_2), & \cdots, & x_n^{n-1}(1-x_n) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1+\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)} D(x_1, \cdots, x_n),$$

可知

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{x_i}{1-x_i} = (-1)^{n-1} \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)} D(x_1, \cdots, x_n). \tag{1.1.5}$$

在此式中换 x_i 为 $-x_i$，可知

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{x_i}{1+x_i} = \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)} D(x_1, \cdots, x_n). \tag{1.1.6}$$

将 (1.1.4) 式中 $l=0$ 时的等式与 (1.1.5) 式相加，可得

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{1}{1-x_i} = D(x_1, \cdots, x_n)\left\{1 + (-1)^{n-1} \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}\right\}. \tag{1.1.7}$$

也易得

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{1}{1+x_i} = D(x_1, \cdots, x_n)\left\{1 - \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}. \tag{1.1.8}$$

根据这些結果，我們可以証明定理 1.1.1 及定理 1.1.2.

定理 1.1.1 的証明：当 $n=2$ 时，(1.1.1) 式之左为

$$\frac{x_1}{(1-x_1^2)(1-x_1^2x_2^2)} - \frac{x_2}{(1-x_2^2)(1-x_1^2x_2^2)} = \frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_1^2x_2^2)}$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{(1 - x_1^2)(1 - x_1 x_2)(1 - x_2^2)} = \frac{D(x_1, x_2)}{\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2} (1 - x_i x_j)},$$

故当 $n = 2$ 时定理成立. 今用归納法証明本定理,假定 $n - 1$ 时定理成立,則有

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta_{i_1,\cdots,i_n}^{1,\cdots,n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1 - x_{i_1}^2)(1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2) \cdots (1 - x_{i_1}^2 \cdots x_{i_n}^2)}$$

$$= \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \sum_{i_2,\cdots,i_{n-1}} \delta_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}^{1,\cdots,a-1,a+1,\cdots,n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1 - x_{i_1}^2)(1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2) \cdots (1 - x_{i_1}^2 \cdots x_{i_n}^2)}$$

$$= \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \frac{x_1 \cdots x_n}{x_a (1 - x_1^2 \cdots x_n^2)} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}} \delta_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}^{1,\cdots,a-1,a+1,\cdots,n} \frac{x_{i_1}^{n-2} x_{i_2}^{n-3} \cdots x_{i_{n-2}}^1}{(1 - x_{i_1}^2) \cdots (1 - x_{i_1}^2 \cdots x_{i_{n-1}}^2)}$$

$$= \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \frac{x_1 \cdots x_n}{x_a (1 - x_1^2 \cdots x_n^2)} \cdot \frac{D(x_1, \cdots, x_{a-1}, x_{a+1}, \cdots, x_n)}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \\ i \neq a,\ j \neq a}} (1 - x_i x_j)}$$

$$= \frac{1}{(1 - x_1^2 \cdots x_n^2) \prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (1 - x_i x_j)} \sum_{a=1}^{n} D_a \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i x_a). \tag{1.1.9}$$

因为

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i x_a) = \sum_{l=0}^{n} \sigma_l x_a^l,$$

此处諸 σ_l 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的初等对称函数,由 (1.1.4) 式可知

$$\sum_{a=1}^{n} D_a \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i x_a) = \sum_{a=1}^{n} D_a \sum_{l=0}^{n} \sigma_l x_a^l = \sum_{l=0}^{n} \sigma_l \sum_{a=1}^{n} D_a x_a^l$$

$$= D(x_1, \cdots, x_n) + (-1)^n x_1 \cdots x_n \cdot (-1)^{n-1} D(x_1, \cdots, x_n) x_1 \cdots x_n$$

$$= D(x_1, \cdots, x_n)(1 - x_1^2 \cdots x_n^2).$$

将上面的結果代入 (1.1.9) 式,即得定理 1.1.1.

定理 1.1.2 的証明: 当 $n = 2$ 时, (1.1.2) 式显然成立. 今用归納法証明本定理,假定当 $n - 1$ 时定理成立,則有

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta_{i_1,\cdots,i_n}^{1,\cdots,n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1 - x_{i_1} x_{i_2})(1 - x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \cdots (1 - x_{i_1} \cdots x_{i_{2\nu}})}$$

$$= \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}} \delta_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}^{1,\cdots,a-1,a+1,\cdots,n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1 - x_{i_1} x_{i_2})(1 - x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \cdots}$$

$$= \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \frac{x_1 \cdots x_n}{x_a(1-\varepsilon x_1 \cdots x_n)} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\cdots,i_{n-1}} \delta_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}^{1,\cdots,a-1,a+1,\cdots,n} \frac{x_{i_1}^{n-2} \cdots x_{i_{n-2}}^{1}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\cdots}, \tag{1.1.10}$$

此处 ε 的定义如下：若 n 是奇数，则 $\varepsilon=0$；若 n 是偶数，则 $\varepsilon=1$. 由归納法的假定，內和等于

$$\frac{D(x_1,\cdots,x_{a-1},x_{a+1},\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_i x_j)} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i x_a)}{1-x_a^2}.$$

代入 (1.1.10) 式，可知 (1.1.2) 式之左方等于

$$\sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \frac{x_1 \cdots x_n}{x_a(1-\varepsilon x_1\cdots x_n)} \cdot \frac{D(x_1,\cdots,x_{a-1},x_{a+1},\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_i x_j)} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i x_a)}{1-x_a^2}$$

$$= \frac{1}{(1-\varepsilon x_1\cdots x_n)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_i x_j)} \sum_{a=1}^{n} \frac{D_a}{1-x_a^2} \prod_{i=1}^{n}(1-x_i x_a)$$

$$= \frac{1}{(1-\varepsilon x_1\cdots x_n)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_i x_j)} \sum_{l=0}^{n} \sigma_l \sum_{a=1}^{n} \frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}. \tag{1.1.11}$$

今分三种情形討論 (1.1.11) 式之內和：

1） l 是奇数，由于

$$\frac{x_a - x_a^l}{1-x_a^2} = x_a(1+x_a^2+\cdots+x_a^{l-3}),$$

故

$$-\frac{x_a^l}{1-x_a^2} = x_a(1+x_a^2+\cdots+x_a^{l-3}) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_a}{1-x_a}+\frac{x_a}{1+x_a}\right).$$

利用 (1.1.4)，(1.1.5) 及 (1.1.6) 可知

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{x_a}{1+x_a}+\frac{x_a}{1-x_a}\right)D_a$$

$$= \frac{1}{2} D(x_1,\cdots,x_n)\, x_1\cdots x_n \left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} + \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}. \tag{1.1.12}$$

2）当 l 是正偶数时，由于

$$\frac{1-x_a^l}{1-x_a^2} = 1+x_a^2+\cdots+x_a^{l-2},$$

故

$$-\frac{x_a^l}{1-x_a^2}=1+x_a^2+\cdots+x_a^{l-2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right).$$

利用 (1.1.4), (1.1.7) 及 (1.1.8) 可知

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=-\sum_{a=1}^{n}D_a+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right)D_a$$

$$=-D(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)\left\{1+(-1)^{n-1}\frac{x_1\cdots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}+1-\frac{x_1\cdots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)\,x_1\cdots x_n\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}-\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}. \qquad (1.1.13)$$

3) 当 $l=0$ 时有

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a}{1-x_a^2}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right)D_a$$

$$=D(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)\,x_1\cdots x_n\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}-\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}. \qquad (1.1.14)$$

由 (1.1.12), (1.1.13) 及 (1.1.14) 可知

$$\sum_{l=0}^{n}\sigma_l\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=D(x_1,\cdots,x_n)$$

$$+\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)\,x_1\cdots x_n\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}-\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)\,x_1\cdots x_n\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}-\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}\sum_{\substack{l=1\\ 2\mid l}}^{n}\sigma_l$$

$$+\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)\,x_1\cdots x_n\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}+\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}\sum_{\substack{l=1\\ 2\nmid l}}^{n}\sigma_l$$

$$=D(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{2}D(x_1,\cdots,x_n)\,x_1\cdots x_n\times$$

$$\times\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}\sum_{l=0}^{n}\sigma_l+\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+1}\sigma_l\right\}$$

$$= D(x_1, \cdots, x_n)\left\{1 + \frac{1}{2} x_1 \cdots x_n ((-1)^{n-1} - 1)\right\}, \qquad (1.1.15)$$

易知 $(-1)^{n-1} - 1 = -2\varepsilon$, ε 的定义如前. 将 (1.1.15) 代入 (1.1.11), 得

$$\frac{1}{(1-\varepsilon x_1 \cdots x_n) \prod\limits_{1 \le i < j \le n} (1 - x_i x_j)} \cdot D(x_1, \cdots, x_n)(1 - \varepsilon x_1 \cdots x_n)$$

$$= \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{\prod\limits_{1 \le i < j \le n} (1 - x_i x_j)}.$$

定理 1.1.2 証完.

附記: 和 (1.1.1) 及 (1.1.2) 相仿,我們有下列恆等式:

$$\sum_{i_1, \cdots, i_n} \delta^{1, \cdots, n}_{i_1, \cdots, i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} \cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1 - x_{i_1})(1 - x_{i_1} x_{i_2}) \cdots (1 - x_{i_1} \cdots x_{i_n})}$$

$$= \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{\prod\limits_{1 \le i < j \le n} (1 - x_i x_j) \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - x_i)}. \qquad (1.1.16)$$

因为在本文中并不用它,所以証明从略.

我們还需要以下的較容易的恆等式.

定理 1.1.3.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1}, & \cdots, & \frac{1}{x_1 + y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{x_n + y_1}, & \cdots, & \frac{1}{x_n + y_n} \end{vmatrix} = \frac{D(x_1, \cdots, x_n) D(y_1, \cdots, y_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{n} (x_i + y_j)}. \qquad (1.1.17)$$

証: 从第二行、第三行、$\cdots$、第 n 行中各減去第一行,且利用等式

$$\frac{1}{x_l + y_k} - \frac{1}{x_1 + y_k} = \frac{x_1 - x_l}{(x_1 + y_k)(x_l + y_k)}, \quad l = 2, \cdots, n, \quad k = 1, \cdots, n,$$

可知上面的行列式等于

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (x_1 + y_k)} \begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ \frac{1}{x_2 + y_1}, & \frac{1}{x_2 + y_2}, & \cdots, & \frac{1}{x_2 + y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{x_n + y_1}, & \frac{1}{x_n + y_2}, & \cdots, & \frac{1}{x_n + y_n} \end{vmatrix}. \qquad (1.1.18)$$

由第二列、第三列、$\cdots$、第 n 列中各減去第一列,則 (1.1.18) 之行列式等于

$$\frac{(y_1-y_2)(y_1-y_3)\cdots(y_1-y_n)}{\prod_{j=2}^{n}(x_j+y_1)}\begin{vmatrix}\frac{1}{x_2+y_2}, & \cdots, & \frac{1}{x_2+y_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{x_n+y_2}, & \cdots, & \frac{1}{x_n+y_n}\end{vmatrix}.$$

由归納法，得出本定理.

以 $-x_1^{-1}, \cdots, -x_n^{-1}$ 代替上面定理中的 $x_1, \cdots, x_n$ 并略加变化可得

定理 1.1.4.

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{1-x_1y_1}, & \cdots, & \frac{1}{1-x_1y_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{1-x_ny_1}, & \cdots, & \frac{1}{1-x_ny_n}\end{vmatrix}=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)D(y_1,\cdots,y_n)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(1-x_iy_j)}.$$

§ 1.2. 关于幂級數的恆等式

定理 1.2.1. 命

$$f_i(z)=\sum_{t=0}^{\infty}a_t^{(i)}z^t \tag{1.2.1}$$

是 n 个幂級数 $(i=1, 2, \cdots, n)$ 且当 $|z|<\rho$ 时收斂，則当 $|z_1|<\rho, \cdots, |z_n|<\rho$ 时，有次之等式

$$\begin{vmatrix}f_1(z_1), & \cdots, & f_1(z_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_n(z_1), & \cdots, & f_n(z_n)\end{vmatrix}=\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant 0}\begin{vmatrix}a_{l_1}^{(1)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{l_1}^{(n)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(n)}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}z_1^{l_1}, & \cdots, & z_1^{l_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ z_n^{l_1}, & \cdots, & z_n^{l_n}\end{vmatrix}. \tag{1.2.2}$$

証： 由行列式的展开法可知此式左边等于

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{1,2,\cdots,n}f_{i_1}(z_1)f_{i_2}(z_2)\cdots f_{i_n}(z_n)$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{1,2,\cdots,n}\sum_{t_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{t_n=0}^{\infty}a_{t_1}^{(i_1)}a_{t_2}^{(i_2)}\cdots a_{t_n}^{(i_n)}z_1^{t_1}\cdots z_n^{t_n}$$

$$=\sum_{t_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{t_n=0}^{\infty}\left(\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{1,2,\cdots,n}a_{t_1}^{(i_1)}a_{t_2}^{(i_2)}\cdots a_{t_n}^{(i_n)}\right)z_1^{t_1}\cdots z_n^{t_n}$$

$$=\sum_{t_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{t_n=0}^{\infty}\begin{vmatrix}a_{t_1}^{(1)}, & \cdots, & a_{t_n}^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{t_1}^{(n)}, & \cdots, & a_{t_n}^{(n)}\end{vmatrix}z_1^{t_1}\cdots z_n^{t_n}$$

$$=\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant 0}\begin{vmatrix}a_{l_1}^{(1)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{l_1}^{(n)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(n)}\end{vmatrix}\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{1,2,\cdots,n}z_1^{l_{i_1}}\cdots z_n^{l_{i_n}},$$

再由行列式的定义得出本定理.

取 $f_i(z) = f(x_i z)$, 则得以下的特例.

定理 1.2.2. 命

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \tag{1.2.3}$$

表示一个当 $|z| < \rho$ 时收斂的冪級数,则当 $|x_j y_k| < \rho$ 时,我們有以下的等式:

$$\begin{vmatrix} f(x_1 y_1), & \cdots, & f(x_1 y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x_n y_1), & \cdots, & f(x_n y_n) \end{vmatrix} = \sum_{l_1 > l_2 > \cdots > l_n \geqslant 0} a_{l_1} \cdots a_{l_n} \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_n} \end{vmatrix}. \tag{1.2.4}$$

取 $f(z) = (1 - z)^{-1}$, 因而得出以下的公式:

$$\sum_{l_1 > \cdots > l_n \geqslant 0} \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{l_n}, & \cdots, & y_n^{l_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-x_1 y_1)^{-1}, & \cdots, & (1-x_1 y_n)^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-x_n y_1)^{-1}, & \cdots, & (1-x_n y_n)^{-1} \end{vmatrix}. \tag{1.2.5}$$

由定理 1.1.4, 此式等于

$$\frac{D(x_1, \cdots, x_n) D(y_1, \cdots, y_n)}{\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)}.$$

在 (1.2.5) 式中命 $x_n = 0$, 凡 $l_n > 0$ 的项都等于 0, 因此得出

$$\sum_{l_1 > \cdots > l_{n-1} \geqslant 0} \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_{n-1}^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_{n-1}}, & \cdots, & x_{n-1}^{l_{n-1}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{l_{n-1}}, & \cdots, & y_n^{l_{n-1}} \\ 1, & \cdots, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{D(x_1, \cdots, x_{n-1}) x_1 \cdots x_{n-1} D(y_1, \cdots, y_n)}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)}.$$

换 l_i 为 $l_i + 1$, 则得

$$\sum_{l_1 > \cdots > l_{n-1} \geqslant 0} \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_{n-1}^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_{n-1}}, & \cdots, & x_{n-1}^{l_{n-1}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^{l_1+1}, & \cdots, & y_n^{l_1+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{l_{n-1}+1}, & \cdots, & y_n^{l_{n-1}+1} \\ 1, & \cdots, & 1 \end{vmatrix} = \frac{D(x_1, \cdots, x_{n-1}) D(y_1, \cdots, y_n)}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i x_j)}.$$

再命 $x_{n-1} = 0$ 等等,續行此法可得

定理 1.2.3. 命 $n \geqslant m > 0$, 则当 $|x_\nu| < 1$, $|y_\nu| < 1$ 时

$$\sum_{l_1>\cdots>l_m\geq 0}\begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_m^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_m}, & \cdots, & x_m^{l_m} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_1^{l_1+n-m}, & \cdots, & y_n^{l_1+n-m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{l_m+n-m}, & \cdots, & y_n^{l_m+n-m} \\ y_1^{n-m-1}, & \cdots, & y_n^{n-m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1, & \cdots, & y_n \\ 1, & \cdots, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{D(x_1,\cdots,x_m)\,D(y_1,\cdots,y_n)}{\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1-x_i y_j)}. \tag{1.2.6}$$

以后还需要以下的求极限的

定理 1.2.4. 命 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 是 n 个具有高次微系数的函数，以下用到几次就有几次，则得

$$\lim_{\substack{x_1\to x\\ \cdots\cdots\\ x_n\to x}}\frac{\begin{vmatrix} f_1(x_1), & \cdots, & f_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x_n), & \cdots, & f_n(x_n) \end{vmatrix}}{D(x_1,\cdots,x_n)} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2!\cdots(n-1)!}\begin{vmatrix} f_1(x), & \cdots, & f_n(x) \\ f_1'(x), & \cdots, & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x), & \cdots, & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{1.2.7}$$

証：并不失其普遍性可以假定 $x_1,\cdots,x_n$ 所趋的极限是 0. 定理的証明可以由有剩余項的戴劳展开式得出来.

附記. 在較強的条件下，例如若 $f_i(z)$ 是解析函数，則本定理乃是定理 1.2.1 的引伸.

§ 1.3. 續前

命 $f_1\geq f_2\geq\cdots\geq f_n\geq 0$ 表 n 个整数且

$$M_{f_1,\cdots,f_n}(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} x_1^{f_1+n-1}, & \cdots, & x_n^{f_1+n-1} \\ x_1^{f_2+n-2}, & \cdots, & x_n^{f_2+n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{f_n}, & \cdots, & x_n^{f_n} \end{vmatrix}, \tag{1.3.1}$$

显然有

$$M_{0,\cdots,0}(x_1,\cdots,x_n)=D(x_1,\cdots,x_n).$$

命

$$N(f_1,\cdots,f_n)=\lim_{\substack{x_1\to 1\\ \cdots\cdots\\ x_n\to 1}}\frac{M_{f_1,\cdots,f_n}(x_1,\cdots,x_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}, \tag{1.3.2}$$

由定理 1.2.4 可知

$$N(f_1,\cdots,f_n)=\frac{D(f_1+n-1,f_2+n-2,\cdots,f_{n-1}+1,f_n)}{D(n-1,n-2,\cdots,1,0)}. \tag{1.3.3}$$

定理 1.3.1. 假定 $1 \leqslant m \leqslant n$，当 $|x_\nu| \leqslant 1\ (\nu = 1, \cdots, m)$ 时，

$$\left(\prod_{i=1}^{m}(1-x_i)\right)^{-\rho-n+1} = C_\rho \sum_{l_1>\cdots>l_m\geqslant 0} a_{l_1+n-m}\cdots a_{l_m+n-m} N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)\times \times\frac{M_{f_1,\cdots,f_m}(x_1,\cdots,x_m)}{D(x_1,\cdots,x_m)}, \tag{1.3.4}$$

此处

$$l_1 = f_1 + m - 1,\quad \cdots,\quad l_{m-1} = f_{m-1} + 1,\quad l_m = f_m,$$

$$a_l = \Gamma(\rho + l)/[\Gamma(\rho)\Gamma(l+1)],\quad C_\rho^{-1} = a_{n-m}\cdots a_{n-1}.$$

証： 1）假定 $m = n$. 在定理 1.2.2 中取

$$f(z) = (1-z)^{-\rho},$$

可知当 $|x_i y_j| < 1$ 时有恒等式

$$\begin{vmatrix}(1-x_1y_1)^{-\rho}, & \cdots, & (1-x_1y_n)^{-\rho}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (1-x_ny_1)^{-\rho}, & \cdots, & (1-x_ny_n)^{-\rho}\end{vmatrix} = \sum_{l_1>\cdots>l_n\geqslant 0} a_{l_1}\cdots a_{l_n}\begin{vmatrix}x_1^{l_1}, & \cdots, & x_1^{l_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_n^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}y_1^{l_1}, & \cdots, & y_1^{l_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_n^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_n}\end{vmatrix}.$$

除以 $D(y_1, \cdots, y_n)$，命 $y_1 \to 1, \cdots, y_n \to 1$，由定理 1.2.4 可知

$$\lim_{\substack{y_1\to 1\\ \cdots\cdots\\ y_n\to 1}}\frac{\begin{vmatrix}(1-x_1y_1)^{-\rho}, & \cdots, & (1-x_1y_n)^{-\rho}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (1-x_ny_1)^{-\rho}, & \cdots, & (1-x_ny_n)^{-\rho}\end{vmatrix}}{D(y_1,\cdots,y_n)} = \frac{(-1)^{\frac12 n(n-1)}}{1!2!\cdots(n-1)!}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}(1-x_1)^{-\rho}, & \cdots, & (1-x_n)^{-\rho}\\ \rho(1-x_1)^{-\rho-1}x_1, & \cdots, & \rho(1-x_n)^{-\rho-1}x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \rho(\rho+1)\cdots(\rho+n-2)(1-x_1)^{-\rho-n+1}x_1^{n-1}, & \cdots, & \rho(\rho+1)\cdots(\rho+n-2)(1-x_n)^{-\rho-n+1}x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac12 n(n-1)}\frac{\rho^{n-1}(\rho+1)^{n-2}\cdots(\rho+n-2)}{1!\,2!\cdots(n-1)!}\left\{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-\rho}\right\}D\left(\frac{x_1}{1-x_1},\cdots,\frac{x_n}{1-x_n}\right)$$

$$= a_0 a_1\cdots a_{n-1} D(x_1,\cdots,x_n)\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-\rho-n+1};$$

因此得出

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)^{-\rho-n+1}$$

$$=\frac{1}{a_0a_1\cdots a_{n-1}}\sum_{l_1>\cdots>l_n\geqslant 0} a_{l_1}\cdots a_{l_n} N(f_1,\cdots,f_n)\frac{M_{f_1,\cdots,f_n}(x_1,\cdots,x_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}. \tag{1.3.5}$$

2）假定 $m<n$. 在 (1.3.5) 式中命 $x_n=0$, 則凡 $l_n>0$ 的項都等于 0; 因此得出

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)^{-\rho-n+1}$$
$$=\frac{1}{a_1\cdots a_{n-1}}\sum_{l>\cdots>l_{n-1}\geqslant 0}a_{l_1}\cdots a_{l_{n-1}}N(f_1,\cdots,f_{n-1},0)\frac{M_{f_1,\cdots,f_{n-1}}(x_1,\cdots,x_{n-1})}{D(x_1,\cdots,x_{n-1})}.$$

換 l_ν 为 $l_\nu+1$, 可得

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)^{-\rho-n+1}$$
$$=\frac{1}{a_1\cdots a_{n-1}}\sum_{l>\cdots>l_{n-1}\geqslant 0}a_{l_1+1}\cdots a_{l_{n-1}+1}N(f_1,\cdots,f_{n-1},0)\frac{M_{f_1,\cdots,f_{n-1}}(x_1,\cdots,x_{n-1})}{D(x_1,\cdots,x_{n-1})}$$

再命 $x_{n-1}=0$ 等等,續行此法可得定理.

定理 1.3.2. 命 $|x|<1$, $|x_k|<1$ $(k=1,2,\cdots,n)$, 我們有恆等式

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}M_{2f_1,\cdots,2f_n}(x_1,\cdots,x_n)\,x^{f_1+\cdots+f_n}=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-x\,x_i\,x_j)}.$$

証: 此式的左边等于

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}x_{i_1}^{2f_1+n-1}x_{i_2}^{2f_2+n-2}\cdots x_{i_n}^{2f_n}x^{f_1+\cdots+f_n}$$
$$=\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}(x\,x_{i_1}^2)^{f_1}\cdots(x\,x_{i_n}^2)^{f_n}$$
$$=\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x\,x_{i_1}^2)(1-x^2x_{i_1}^2x_{i_2}^2)\cdots(1-x^n x_{i_1}^2\cdots x_{i_n}^2)},\qquad(1.3.6)$$

此处用了以下的公式: 若 $|a_\nu|<1$, 則

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}a_1^{f_1}\cdots a_n^{f_n}=\frac{1}{(1-a_1)(1-a_1a_2)\cdots(1-a_1a_2\cdots a_n)}.\qquad(1.3.7)$$

此式之証明十分簡单,可用归納法証之如次: 命 $g_i=f_i-f_n$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 則

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}a_1^{f_1}\cdots a_n^{f_n}=\sum_{g_1\geqslant\cdots\geqslant g_{n-1}\geqslant 0}a_1^{g_1}\cdots a_{n-1}^{g_{n-1}}\sum_{f_n=0}^{\infty}(a_1\cdots a_n)^{f_n};$$

因此可得 (1.3.7).

在定理 1.1.1 中,用 $\sqrt{x}\,x_i$ 代 x_i, 則得公式

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}(\sqrt{x})^{\frac12 n(n-1)}}{(1-x\,x_{i_1}^2)\cdots(1-x^n x_{i_1}^2\cdots x_{i_n}^2)}=\frac{(\sqrt{x})^{\frac12 n(n-1)}D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-x\,x_i\,x_j)}.\qquad(1.3.8)$$

以此代入 (1.3.6) 式,即得定理 1.3.2.

定理 1.3.3. 命 $\nu=\left[\frac{1}{2}n\right]$. 当 $|x|<1$, $|x_k|<1$ $(k=1,2,\cdots n,)$ 时, 我們有恆等式

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_\nu\geqslant 0} M_{f_1,f_1,f_2,f_2,\cdots}(x_1,\cdots,x_n)\,x^{f_1+\cdots+f_\nu}=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x\,x_i\,x_j)}. \qquad (1.3.9)$$

若 n 是奇数，则 $M_{f_1,f_1,f_2,f_2,\cdots}$ 的最后的足碼是 0.

証：(1.3.9)式的左边等于

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_\nu\geqslant 0}\ \sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}x_{i_1}^{f_1+n-1}x_{i_2}^{f_2+n-2}\cdots x_{i_n}^{f_n}x^{f_1+\cdots+f_\nu}$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_\nu\geqslant 0}(x\,x_{i_1}x_{i_2})^{f_1}(x\,x_{i_3}x_{i_4})^{f_2}\cdots$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_n}\delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}/(1-x\,x_{i_1}x_{i_2})(1-x^2x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\cdots,$$

由定理 1.1.2 可知此式等于

$$\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x\,x_i\,x_j)}.$$

定理 1.3.4. 当 $|x|<1$, $|x_k|<1\ (k=1,2,\cdots,n)$ 时

$$\sum_{f=0}^{\infty}M_{f,0,\cdots,0}(x_1,\cdots,x_n)\,x^f=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x\,x_i)}.$$

証：上式左边等于

$$\sum_{f=0}^{\infty}\begin{vmatrix}(x_1x)^f x_1^{n-1}, x_1^{n-2},\cdots,x_1,1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ (x_nx)^f x_n^{n-1}, x_n^{n-2},\cdots,x_n,1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{x_1^{n-1}}{1-x\,x_1}, x_1^{n-2},\cdots,x_1,1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{x_n^{n-1}}{1-x\,x_n}, x_n^{n-2},\cdots,x_n,1\end{vmatrix}=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x\,x_i)}.$$

定理 1.3.5. 我們有恆等式

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\frac{(f_1+\cdots+f_n)!}{l_1!\cdots l_n!}D(l_1,\cdots,l_n)\begin{vmatrix}x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n}\end{vmatrix}$$
$$=(1-x_1-\cdots-x_n)^{-1}D(x_1,\cdots,x_n).$$

証：在定理 1.2.2 中取

$$f(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{l!}=e^z,$$

得出

$$\sum_{l_1>\cdots>l_n\geqslant 0}\frac{1}{l_1!\cdots l_n!}\begin{vmatrix}y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{l_n}, & \cdots, & y_n^{l_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{x_1y_1}, & \cdots, & e^{x_1y_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ e^{x_ny_1}, & \cdots, & e^{x_ny_n}\end{vmatrix}.$$

由于

$$(f_1+\cdots+f_n)!=\int_0^\infty e^{-t}t^{f_1+\cdots+f_n}\,dt,$$

故得

$$\sum_{l_1>\cdots>l_n>0}\frac{(f_1+\cdots+f_n)!}{l_1!\cdots l_n!}\begin{vmatrix}y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{l_n}, & \cdots, & y_n^{l_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n}\end{vmatrix}$$

$$=\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}n(n-1)}e^{-t}\sum_{l_1>\cdots>l_n>0}\frac{1}{l_1!\cdots l_n!}\begin{vmatrix}y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{l_n}, & \cdots, & y_n^{l_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}(x_1t)^{l_1}, & \cdots, & (x_nt)^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (x_1t)^{l_n}, & \cdots, & (x_nt)^{l_n}\end{vmatrix}dt$$

$$=\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}n(n-1)}e^{-t}\begin{vmatrix}e^{x_1y_1t}, & \cdots, & e^{x_1y_nt}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ e^{x_ny_1t}, & \cdots, & e^{x_ny_nt}\end{vmatrix}dt.$$

由于

$$\lim_{y_\nu\to y}\frac{1}{D(y_1,\cdots,y_n)}\begin{vmatrix}y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{l_n}, & \cdots, & y_n^{l_n}\end{vmatrix}=\frac{D(l_1,\cdots,l_n)}{(n-1)!(n-2)!\cdots1!}$$

及定理 1.2.4 可知

$$\sum_{l_1>\cdots>l_n>0}\frac{(f_1+\cdots+f_n)}{l_1!\cdots l_n!}D(l_1,\cdots,l_n)\begin{vmatrix}x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}n(n-1)}e^{-t}\begin{vmatrix}e^{x_1t}, & \cdots, & e^{x_nt}\\ x_1te^{x_1t}, & \cdots, & x_nte^{x_nt}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (x_1t)^{n-1}e^{x_1t}, & \cdots, & (x_nt)^{n-1}e^{x_nt}\end{vmatrix}$$

$$=D(x_1,\cdots,x_n)\int_0^\infty e^{-t+(x_1+\cdots+x_n)t}\,dt$$

$$=D(x_1,\cdots,x_n)/(1-x_1-\cdots-x_n).$$

在定理 1.3.5 中,命 $x_1\to x,\cdots,x_n\to x$, 并利用定理 1.2.4 卽得

定理 1.3.6. 我們有恒等式

$$\sum_{l_n=0}^\infty\cdots\sum_{l_1=0}^\infty\frac{\left(l_1+\cdots+l_n-\frac{1}{2}n(n-1)\right)!}{l_1!\cdots l_n!}D(l_1,\cdots,l_n)^2x^{l_1+\cdots+l_n}$$

$$=n!(n-1)!(n-2)!\cdots2!\,1!\,x^{\frac{1}{2}n(n-1)}/(1-nx).$$

比較系数卽得

$$\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_n=m\\ l_\nu\geqslant 0}} \frac{D(l_1,\cdots,l_n)^2}{l_1!\cdots l_n!} = \frac{n^{m-\frac{1}{2}n(n-1)}}{\left(m-\frac{1}{2}n(n-1)\right)!} n!(n-1)!\cdots 1!. \quad (1.3.10)$$

§ 1.4. 关于 $N(f_1,\cdots,f_n)$ 的若干恒等式

本节中将引进若干与 $N(f_1,\cdots,f_n)$ 有关的恆等式，这些恆等式是 §1.5 的恆等式的特例. 从这些恆等式讀者就易于了解构思的过程了.

定理 1.4.1. 若 $n\geqslant m>0$，则当 $|x|<1$ 时有

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_m\geqslant 0} N(f_1,\cdots,f_m)\,N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)\,x^{f_1+\cdots+f_m} = (1-x)^{-mn}. \quad (1.4.1)$$

比較系数可得

$$\sum_{\substack{f_1+\cdots+f_m=f\\ f_1\geqslant\cdots\geqslant f_m\geqslant 0}} N(f_1,\cdots,f_m)\,N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0) = \frac{(mn+f-1)!}{(mn-1)!\,f!}. \quad (1.4.2)$$

証： 在定理 1.2.3 中以 $x\,x_i$ 代替 x_i，并命 $x_i\to 1$，$y_i\to 1$，卽得定理 1.4.1.

定理 1.4.2. 若 $|x|<1$，则

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0} N(2f_1,\cdots,2f_n)\,x^{f_1+\cdots+f_n} = (1-x)^{-\frac{1}{2}n(n+1)}. \quad (1.4.3)$$

比較系数可得

$$\sum_{\substack{f_1+\cdots+f_n=f\\ f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}} N(2f_1,\cdots,2f_n) = \frac{\left(f+\frac{1}{2}n(n+1)-1\right)!}{f!\left(\frac{1}{2}n(n+1)-1\right)!}.$$

証： 由定理 1.3.2 极易推出本定理.

定理 1.4.3. 若 $|x|<1$，则

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_\nu\geqslant 0} N(f_1,f_1,f_2,f_2,\cdots)\,x^{f_1+f_2+\cdots+f_\nu} = (1-x)^{-\frac{1}{2}n(n-1)}. \quad (1.4.4)$$

比較系数可得

$$\sum_{\substack{f_1+\cdots+f_\nu=f\\ f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_\nu\geqslant 0}} N(f_1,f_1,f_2,f_2,\cdots) = \frac{\left(f+\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)!}{f!\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)!}. \quad (1.4.5)$$

§ 1.5. 关于特征的恆等式

命 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0$ 为 n 个整数. 以

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(X) \quad (1.5.1)$$

表示一般綫性羣标签为 $(f_1, \cdots, f_n)$ 的表示法，并假定当 X 是一酉方陣时，它也是酉方陣. 习知 (1.5.1) 式是一 $N(f_1, \cdots, f_n)$ 行列的方陣，其对角綫元素的和以

$$\chi_{f_1,\cdots,f_n}(X) = \sigma(A_{f_1,\cdots,f_n}(X))$$

表之，此称为表示 (1.5.1) 的特征.

若 X 是一对角綫方陣 $\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$，則习知

$$\chi_{f_1,\cdots,f_n}(\Lambda) = \frac{M_{f_1,\cdots,f_n}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)}{D(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)}. \tag{1.5.2}$$

今后簡书

$$A_{q,0,\cdots,0}(X) = A^{[q]}(X) = X^{[q]}$$

及

$$A_{\underbrace{1,\cdots,1}_{q\text{个}},0,\cdots,0}(X) = A^{(q)}(X) = X^{(q)}.$$

定理 1.5.1. 命 $n \geqslant m > 0$. X 代表 m 維空間一般綫性羣 GL_m 中的一元素而 Y 代表 GL_n 中的一元素，且以 $X \cdot\times Y$ 表 X 与 Y 的直乘积，則

$$\sigma((X \cdot\times Y)^{[f]}) = \sum_{\substack{f_1+\cdots+f_m=f\\ f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_m\geqslant 0}} \chi_{f_1,\cdots,f_m}(X)\,\chi_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(Y). \tag{1.5.3}$$

証: 先討論 $X = [x_1, \cdots, x_m]$, $Y = [y_1, \cdots, y_n]$ 时的情况. 由定理 1.2.3 (并以 $x_i x$ 代 x_i) 可得

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_m\geqslant 0} \chi_{f_1,\cdots,f_m}(X)\,\chi_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(Y)\, x^{f_1+\cdots+f_m} = \left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1 - x\,x_i\,y_j)\right)^{-1}; \tag{1.5.4}$$

另一方面由定理 1.3.4 可知

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sigma((X\cdot\times Y)^{[f]})\, x^f = \left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1 - x\,x_i\,y_j)\right)^{-1}. \tag{1.5.5}$$

比較 (1.5.4) 与 (1.5.5) 的系数，可知本定理对 X 及 Y 为对角綫方陣时眞实.

又 (1.5.3) 的任一項都是类函数，即一函数 $f(X)$ 适合于次之性質者：对任一非奇异方陣 P 常有 $f(X) = f(PXP^{-1})$. 因之对任一与 $[x_1, \cdots, x_m]$ 相似的 X 及任一与 $[y_1, \cdots, y_n]$ 相似的 Y, (1.5.3) 一定成立. 由連續性可知定理 1.5.1 成立.

定理 1.5.2. 我們有恆等式

$$\sum_{\substack{f_1+\cdots+f_n=f\\ f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}} \chi_{2f_1,\cdots,2f_n}(X) = \sigma((X^{[2]})^{[f]}). \tag{1.5.6}$$

証: 先假定 $X = [x_1, \cdots, x_n]$. 由定理 1.3.2 可知

$$\sum_{f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0} \chi_{2f_1,\cdots,2f_n}(x_1, \cdots, x_n)\, x^{f_1+\cdots+f_n} = \frac{1}{\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (1 - x x_i x_j)};$$

另一方面，在定理 1.3.4 中取 n 为 $N = \frac{1}{2} n(n+1)$，$x_1, \cdots, x_n$ 为 $x_1^2, x_1 x_2, \cdots, x_1 x_n, x_2^2, x_2 x_3, \cdots, x_2 x_n, x_3^2, \cdots, x_n^2$，因此得出

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sigma((X^{[2]})^{[f]})\, x^f = \frac{1}{\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (1 - x x_i x_j)},$$

比較系数,与上定理之証明法相同,可得定理.

同法可得

定理 1.5.3. 我們有恆等式

$$\sum_{\substack{f_1+\cdots+f_\nu=f \\ f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_\nu \geqslant 0}} \chi_{f_1,f_1,f_2,f_2,\cdots}(X) = \sigma((X^{(2)})^{[f]}). \tag{1.5.7}$$

第 二 章

計 算 若 干 积 分

§ 2.1. 与反正切函数相仿的一些积分

定理 2.1.1. 若 $\alpha > \frac{1}{2}n$, 則

$$I_n(\alpha) = \int \cdots \int_T \frac{\dot{T}}{(\det(I+T^2))^{\alpha}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} \pi^{\frac{1}{4}n(n+1)} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}n\right)}{\Gamma(\alpha)} \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{1}{2}(n+\nu)\right)}{\Gamma(2\alpha-\nu)}, \qquad (2.1.1)$$

此处 T 过所有的 n 行列的实对称方陣 $T=(t_{jk})$, $\dot{T} = 2^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{j\leqslant k} dt_{jk}$.

首先祉我們引进以下二定理:

定理 2.1.2. 命 $Z = Z^{(m,n)}$, 則有

$$\det(I^{(m)} - Z\bar{Z}') = \det(I^{(n)} - \bar{Z}'Z). \qquad (2.1.2)$$

又凡适合于 $I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0$ 的 Z 一定适合于 $I^{(n)} - \bar{Z}'Z > 0$, 反之亦然.

証: 习知有二酉方陣 $U = U^{(m)}$, $V = V^{(n)}$ 存在,使

$$Z = U\Lambda V,$$

此处

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad \lambda_\nu \geqslant 0.$$

由是卽得

$$\det(I^{(m)} - Z\bar{Z}') = (1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2)\cdots = \det(I^{(n)} - \bar{Z}'Z).$$

同法可以証明定理的第二部分.

定理 2.1.3. 命 $a>0$, $b^2 - ac < 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$, 則

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^{\alpha}} = a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}. \qquad (2.1.3)$$

証：命

$$y=\frac{a}{\sqrt{ac-b^2}}\left(x+\frac{b}{a}\right),$$

則

$$dx=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}dy$$

及

$$ax^2+2bx+c=\frac{ac-b^2}{a}(y^2+1).$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^\alpha}=a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)^\alpha}=$$

$$=a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}.$$

定理 2.1.1 的証明：命

$$T=\begin{pmatrix}T_1 & v'\\ v & t\end{pmatrix}\qquad(t=t_{nn}),$$

此处 T_1 为一 $n-1$ 行列的实对称方陣，v 为一 $n-1$ 維矢量，t 为一实数，如是則

$$I+T^2=\begin{pmatrix}I+T_1^2+v'v & T_1v'+v't\\ vT_1+tv & 1+vv'+t^2\end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{pmatrix}I & 0\\ -bA^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & b'\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ -bA^{-1} & 1\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & c-bA^{-1}b'\end{pmatrix}\qquad(A=A'),\qquad(2.1.4)$$

可知

$$\det(I+T^2)=(1+vv'+t^2-(vT_1+tv)(I+T_1^2+v'v)^{-1}(T_1v'+v't))\times$$
$$\times\det(I+T_1^2+v'v).$$

上式右边第一項因子可以写成 $at^2+2bt+c$ 的形式，其中

$$\begin{aligned}a&=1-v(I+T_1^2+v'v)^{-1}v',\\ 2b&=-vT_1(I+T_1^2+v'v)^{-1}v'-v(I+T_1^2+v'v)^{-1}T_1v'\\ &=-2v(I+T_1^2+v'v)^{-1}T_1v',\\ c&=1+vv'-vT_1(I+T_1^2+v'v)^{-1}T_1v'.\end{aligned}$$

但对 T_1 有正交方陣 Γ 使

$$T_1=\Gamma'[\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}]\Gamma.$$

命

$$T_2 = \Gamma'[\sqrt{1+\lambda_1^2}, \cdots, \sqrt{1+\lambda_{n-1}^2}]\,\Gamma,$$

則

$$T_2 = T_2', \qquad T_1 T_2 = T_2 T_1, \qquad I + T_1^2 = T_2^2.$$

如命 $v = w T_2$，則可知

$$\dot{v} = (\det T_2)\,\dot{w} = (\det(I + T_1^2))^{\frac{1}{2}}\,\dot{w}$$

及

$$I + T_1^2 + v'v = T_2(I + w'w)\,T_2.$$

又如 u 为一 $n-1$ 維矢量，則有

$$u(I + w'w)^{-1}u' = u u' - \frac{(u\,w')^2}{1 + w\,w'}.$$

又

$$w\,(I + w'w)^{-1} = \frac{w}{1 + w\,w'},$$

故可知

$$a = 1 - w\,(I + w'w)^{-1}\,w' = (1 + w\,w')^{-1}\,(> 0),$$

$$b = -\,w\,(I + w'w)^{-1}\,T_1\,w' = -\,\frac{w\,T_1\,w'}{1 + w\,w'},$$

$$c = 1 + w\,T_2^2\,w' - w\,T_1(I + w'w)^{-1}\,T_1\,w' = 1 + w\,w' + \frac{(w\,T_1\,w')^2}{1 + w\,w'}.$$

于是得

$$a\,c - b^2 = 1.$$

由定理 2.1.3 得

$$\begin{aligned}
I_n(\alpha) &= \int\cdots\int_T \frac{\dot{T}}{(\det(I + T^2))^{\alpha}} \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}} \int\cdots\int_{t,v,T_1} (\det(I + T_1 + v'v))^{-\alpha}\,(a\,t^2 + 2\,b\,t + c)^{-\alpha}\,dt\,\dot{v}\,\dot{T}_1 \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int\cdots\int_w (1 + w\,w')^{1-2\alpha}\,\dot{w} \int\cdots\int_{T_1} (\det(I + T_1^2))^{\frac{1}{2}-\alpha}\,\dot{T}_1 \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}\,\Gamma\left(2\alpha - \frac{1}{2}(n+1)\right)\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(2\,\alpha - 1)} \cdot I_{n-1}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right),
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

此处用了

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(1+x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)^{1-2\alpha}dx_1\cdots dx_{n-1}$$

$$=\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{\Gamma\left(2\alpha-\frac{1}{2}(n+1)\right)}{\Gamma(2\alpha-1)}\quad\left(\alpha>\frac{n+1}{4}\right).\quad(2.1.6)$$

繼續运用 (2.1.5), 又因

$$I_1\left(\alpha-\frac{n-1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha-\frac{n-1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha-\frac{n-1}{2}\right)}\quad\left(\alpha>\frac{n}{2}\right),$$

即得定理.

定理 2.1.4. 命 $n\geqslant2$. 若 $\alpha>\frac{1}{4}(2n-3)$, 則

$$J_n(\alpha)=\int\cdots\int_K\frac{\dot{K}}{(\det(I+KK'))^{\alpha}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\pi^{\frac{1}{4}n(n-1)}\prod_{\nu=2}^{n}\frac{\Gamma\left(2\alpha-n+\frac{1}{2}(\nu+1)\right)}{\Gamma(2\alpha-n+\nu)},\quad(2.1.7)$$

此处K过所有的n行列的实斜对称方陣, $K=(k_{ij})$, $\dot{K}=2^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{i<j}dk_{ij}$.

証: 把K写成

$$K=\begin{pmatrix}K_1 & -t'\\ t & 0\end{pmatrix},$$

此处 K_1 为一 $n-1$ 行列的实斜对称方陣, t 为一 $n-1$ 維矢量, 于是

$$I+KK'=\begin{pmatrix}I+K_1K_1'+t't & K_1t'\\ tK_1' & 1+tt'\end{pmatrix}.$$

利用 (2.1.4) 可得

$$\det(I+KK')=(1+tt'-tK_1'(I+K_1K_1'+t't)^{-1}K_1t')\det(I+K_1K_1'+t't).$$

有一正交方陣Γ使

$$K_1=\Gamma\left(\begin{pmatrix}0&\lambda_1\\-\lambda_1&0\end{pmatrix}\dotplus\begin{pmatrix}0&\lambda_2\\-\lambda_2&0\end{pmatrix}\dotplus\cdots\right)\Gamma',$$

括弧中最后一項或为 $\begin{pmatrix}0&\lambda_{\frac{n}{2}}\\-\lambda_{\frac{n}{2}}&0\end{pmatrix}$ 或为 $\begin{pmatrix}0&\lambda_{\frac{n-1}{2}}\\-\lambda_{\frac{n-1}{2}}&0\end{pmatrix}\dotplus0$, 各視 n 为偶或奇而定.

命

$$T = \Gamma[\sqrt{1+\lambda_1^2},\ \sqrt{1+\lambda_1^2},\ \sqrt{1+\lambda_2^2},\ \sqrt{1+\lambda_2^2},\ \cdots]\Gamma',$$

則

$$T = T',\quad K_1 T = T K_1,\quad I + K_1 K_1' = T^2.$$

又命 $t = wT$，則

$$\dot{t} = (\det T\dot{w}) = (\det(I + K_1 K_1'))^{\frac{1}{2}}\dot{w},$$

$$I + K_1 K_1' + t't = T^2 + T w'w T = T(I + w'w)T.$$

所以

$$\begin{aligned}
&1 + tt' - tK_1'(I + K_1K_1' + t't)^{-1}K_1t'\\
&= 1 + wT^2w' - wTK_1'T^{-1}(I + w'w)^{-1}T^{-1}K_1Tw'\\
&= 1 + wT^2w' - wK_1'(I + w'w)^{-1}K_1w'\\
&= 1 + ww' - \frac{(wK_1w')^2}{1 + ww'} = 1 + ww'.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
J_n(\alpha) &= \int_K\cdots\int \frac{\dot{K}}{(\det(I + KK'))^{\alpha}}\\
&= 2^{\frac{n-1}{2}}\int_{K_1}\cdots\int \frac{\dot{K}_1}{(\det(I + K_1K_1'))^{\alpha-\frac{1}{2}}}\int_w\cdots\int(1 + ww')^{-2\alpha}\dot{w}\\
&= 2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{1}{2}(n-1)\right)}{\Gamma(2\alpha)}J_{n-1}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

連續应用此式并最后算出

$$J_2\left(\alpha - \frac{n-2}{2}\right) = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1 + t^2)^{2\alpha-n+2}} = \sqrt{2}\,\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(2\alpha - n + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha - n + 2)}$$

$$\left(\alpha > \frac{1}{4}(2n - 3)\right),$$

即得定理.

定理 2.1.5. 設 $\alpha > n - \frac{1}{2}$，H 表 n 行列的爱尔米方陣，則

$$H_n(\alpha) = \int_H\cdots\int\frac{\dot{H}}{(\det(I + H^2))^{\alpha}} =$$

$$= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \pi^{\frac{1}{2}n^2} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\alpha - j - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha - j)} \prod_{k=0}^{n-2} \frac{\Gamma(2\alpha - n - k)}{\Gamma(2\alpha - 2k - 1)}, \qquad (2.1.8)$$

此处 $H = (h_{jk}), h_{jj} = h_j, h_{jk} = h'_{jk} + i h''_{jk} (j<k), \dot{H} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} dh_j \prod_{j<k} dh'_{jk} dh''_{jk}$.

証： 命

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & \bar{v}' \\ v & h \end{pmatrix} \qquad (h = h_n),$$

其中 H_1 为一 $n-1$ 行列的爱尔米方陣，v 为一 $n-1$ 維矢量，h 为一实数，則

$$I + H^2 = \begin{pmatrix} I + H_1^2 + \bar{v}'v & H_1\bar{v}' + \bar{v}'h \\ vH_1 + hv & 1 + h^2 + v\bar{v}' \end{pmatrix}.$$

利用等式

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -pA^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \bar{p}' \\ p & l \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} I & 0 \\ -pA^{-1} & 1 \end{pmatrix}}' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & l - pA^{-1}\bar{p}' \end{pmatrix} \quad (A = \bar{A}'), \quad (2.1.9)$$

可得

$$\det(I + H^2) = (ah^2 + 2bh + c) \det(I + H_1^2 + \bar{v}'v),$$

此处

$$a = 1 - v(I + H_1^2 + \bar{v}'v)^{-1}\bar{v}',$$
$$2b = -vH_1(I + H_1^2 + \bar{v}'v)^{-1}\bar{v}' - v(I + H_1^2 + \bar{v}'v)^{-1}H_1\bar{v}',$$
$$c = 1 + v\bar{v}' - vH_1(I + H_1^2 + \bar{v}'v)^{-1}H_1\bar{v}'.$$

因 H_1 为爱尔米方陣，故存在一酉方陣 U 使

$$H_1 = U[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]\bar{U}'.$$

命

$$T = U[\sqrt{1+\lambda_1^2}, \sqrt{1+\lambda_2^2}, \cdots, \sqrt{1+\lambda_n^2}]\bar{U}',$$

則

$$T = \bar{T}', \quad TH_1 = H_1T, \quad I + H_1^2 = T^2.$$

再作变换

$$v = uT,$$

則

$$\dot{v} = |\det T|^2 \dot{u} = \det(I + H_1^2)\dot{u},$$
$$I + H_1^2 + \bar{v}'v = T(I + \bar{u}'u)T.$$

又因为

$$(I + \bar{u}'u)^{-1}\bar{u}' = \frac{\bar{u}'}{1 + u\bar{u}'}, \quad w(I + \bar{u}'u)^{-1}\bar{w}' = w\bar{w}' - \frac{|w\bar{u}'|^2}{1 + u\bar{u}'},$$

此处 w 为一 $n-1$ 維矢量，故可知

$$a = 1 - u(I + \bar{u}'u)^{-1}\bar{u}' = \frac{1}{1 + u\bar{u}'} (> 0),$$

$$b = -uH_1(I + \bar{u}'u)^{-1}\bar{u}' = -\frac{uH_1\bar{u}'}{1 + u\bar{u}'},$$

$$c = 1 + uT^2\bar{u}' - uH_1(I + \bar{u}'u)^{-1}H_1\bar{u}' = 1 + u\bar{u}' + \frac{|uH_1\bar{u}'|^2}{1 + u\bar{u}'}.$$

由于 $uH_1\bar{u}'$ 是实数，故得

$$ac - b^2 = 1.$$

由定理 2.1.3 可得

$$H_n(\alpha) = \int_H \cdots \int \frac{\dot{H}}{(\det(I + H^2))^\alpha}$$

$$= 2^{n-1} \int_{u, H_1} \cdots \int (\det(I + H_1^2))^{1-\alpha}(1 + u\bar{u}')^{-\alpha}\dot{u}\dot{H}_1 \int_{-\infty}^{\infty} (ah^2 + 2bh + c)^{-\alpha} dh$$

$$= 2^{n-1} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_u \cdots \int (1 + u\bar{u}')^{1-2\alpha}\dot{u} \int_{H_1} \cdots \int (\det(I + H_1^2))^{1-\alpha}\dot{H}_1$$

$$= 2^{n-1}\pi^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Gamma(2\alpha - n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha - 1)} H_{n-1}(\alpha - 1).$$

繼續应用此式，并直接算出

$$H_1(\alpha - n + 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{\alpha - n + 1}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\alpha - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \quad \left(\alpha > n - \frac{1}{2}\right),$$

即得定理.

§ 2.2. 矩陣双曲空間的总体积

定理 2.2.1. 命 $Z = Z^{(m,n)}$, $\lambda > -1$; 并命

$$J_{m,n}(\lambda) = \int_{I - Z\bar{Z}' > 0} \cdots \int \det(I - Z\bar{Z}')^\lambda \dot{Z},$$

則

$$J_{m,n}(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(\lambda + j) \prod_{k=1}^{m} \Gamma(\lambda + k)}{\prod_{l=1}^{n+m} \Gamma(\lambda + l)} \pi^{mn}. \tag{2.2.1}$$

特別如 $\lambda=0$，則得矩陣双曲空間 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的体积等于

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})=J_{m,n}(0)=\frac{(m-1)!\cdots 2!\,1!\,(n-1)!\cdots 2!\,1!}{(m+n-1)!\cdots 2!\,1!}\pi^{mn}. \tag{2.2.2}$$

在証明定理之前，先敍述两个遞化公式来計算如次的积分：

$$\int_{I^{(m)}-Z\bar{Z}'>0}\cdots\int f(Z)\,\dot{Z}.$$

1）把矩陣 Z 分裂成

$$Z=(Z_{m,n-1},\ q),$$

此处 $Z_{m,n-1}=Z^{(m,n-1)}$ 而 q 是一列，显然有

$$I-Z\bar{Z}'=I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}-q\bar{q}'.$$

由 $I-Z\bar{Z}'>0$ 及 $q\bar{q}'\geqslant 0$ 可知 $I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}>0$，故有一非奇异方陣 Γ 使

$$I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}=\Gamma\bar{\Gamma}'.$$

作变換 $q=\Gamma w$，則

$$\dot{q}=|\det\Gamma|^2\dot{w}=(\det\Gamma\bar{\Gamma}')\,\dot{w}=\det(I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1})\,\dot{w}.$$

故得

$$\int_{I-Z\bar{Z}'>0}\cdots\int f(Z)\,\dot{Z}=\int_{I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}>0}\cdots\int \det(I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1})\,\dot{Z}_{m,n-1}\int_{I^{(m)}-w\bar{w}'>0}\cdots\int f(Z)\,\dot{w},$$

在証明的过程中用了公式：

$$I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}-q\bar{q}'=\Gamma(I-w\bar{w}')\bar{\Gamma}'.$$

由定理 2.1.2 可知由 $I^{(m)}-w\bar{w}'>0$ 可得 $1-\bar{w}'w>0$，这就是一个普通的超球体．故得出

$$\int_{I-Z\bar{Z}'>0}\cdots\int f(Z)\,\dot{Z}=\int_{I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}>0}\cdots\int \det(I-Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1})\,\dot{Z}_{m,n-1}\int_{1-\bar{w}'w>0}\cdots\int f(Z)\,\dot{w}. \tag{2.2.3}$$

2）我們用另一种方法来分裂

$$Z=\begin{pmatrix}Z_{m-1,n}\\ p\end{pmatrix},\qquad Z_{m-1,n}=Z^{(m-1,n)}$$

而 p 是矢量．由于 $I-Z\bar{Z}'>0$ 与 $I-\bar{Z}'Z>0$ 等价，故如 1）可知

$$\int_{I-Z\bar{Z}'>0}\cdots\int f(Z)\,\dot{Z}=\int_{I-\bar{Z}'Z>0}\cdots\int f(Z)\,\dot{Z}$$

$$= \int_{I-\bar{Z}'_{m-1,n}Z_{m-1,n}>0} \cdots \int \det(I - \bar{Z}'_{m-1,n} Z_{m-1,n}) \dot{Z}_{m-1,n} \int_{I-\bar{u}'u>0} \cdots \int f(Z) \dot{u},$$

此处 $p = u\Gamma$ 而 $I - \bar{Z}'_{m-1,n} Z_{m-1,n} = \bar{\Gamma}'\Gamma$. 因此得出

$$\int_{I-Z\bar{Z}'>0} \cdots \int f(Z) \dot{Z} = \int_{I-Z_{m-1,n}\bar{Z}'_{m-1,n}>0} \cdots \int \det(I - Z_{m-1,n} \bar{Z}'_{m-1,n}) \dot{Z}_{m-1,n} \int_{I-u\bar{u}'>0} \cdots \int f(Z) \dot{u}. \quad (2.2.4)$$

定理 2.2.1 的証明: 反复应用 (2.2.3) 可得

$$\int_{I-Z\bar{Z}'>0} \cdots \int f(Z) \dot{Z} = \int_{w_1\bar{w}_1'<1} \cdots \int (1 - w_1 \bar{w}_1')^{n-1} \dot{w}_1 \times$$

$$\times \int_{w_2\bar{w}_2'<1} \cdots \int (1 - w_2 \bar{w}_2')^{n-2} \dot{w}_2 \times \cdots \times \int_{w_n\bar{w}_n'<1} \cdots \int f(Z) \dot{w}_n. \quad (2.2.5)$$

取 $f(Z) = (\det(I - Z\bar{Z}'))^\lambda$, 可得

$$J_{m,n}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \int_{w\bar{w}'<1} \cdots \int (1 - w\bar{w}')^{j-1+\lambda} \dot{w}.$$

(此式亦可由 (2.2.4) 証明之.)

习知

$$\int_{x_1^2+\cdots+x_{2m}^2<1} \cdots \int (1 - x_1^2 - \cdots - x_{2m}^2)^{\mu-1} dx_1 \cdots dx_{2m} = \pi^m \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+m)} \quad (\mu>0), \quad (2.2.6)$$

故得定理.

累次运用 (2.2.4) 式,可得

定理 2.2.2. 若 $Z = Z^{(m,n)}$, $m > l$; 又若 $f(Z)$ 乃一函数与 Z 之最底下 $m-l$ 行无关者. 如命 Z 之前 l 行所成之矩陣为 Z_1, 即可命 $f(Z) = f(Z_1)$, 如是則得

$$\int_{I-Z\bar{Z}'>0} \cdots \int f(Z) \dot{Z} = \pi^{(m-l)n} \frac{0!\,1!\cdots(m-l-1)!}{n!(n+1)!\cdots(n+m-l-1)!} \times$$

$$\times \int_{I-Z_1\bar{Z}_1'>0} \cdots \int f(Z_1) (\det(I - Z_1\bar{Z}_1'))^{m-l} \dot{Z}_1. \quad (2.2.7)$$

§ 2.3. 对称方陣双曲空間的总体积

定理 2.3.1. 命 $Z (= Z^{(n)} = Z')$ 表对称方陣; 并命

$$J_n(\lambda) = \int_{I-Z\bar{Z}>0} \cdots \int (\det(I - Z\bar{Z}))^\lambda \dot{Z},$$

则当 $\lambda > -1$ 时

$$J_n(\lambda) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+3)\Gamma(2\lambda+5)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-1)}{\Gamma(2\lambda+n+2)\Gamma(2\lambda+n+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2n)}. \quad (2.3.1)$$

特別如 $\lambda = 0$，則得对称方陣双曲空間 $\mathfrak{R}_{\rm II}$ 的总体积等于

$$V(\mathfrak{R}_{\rm II}) = J_n(0) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{n!} \cdot \frac{2!\,4!\cdots(2n-2)!}{(n+1)!\,(n+2)!\cdots(2n-1)!}. \quad (2.3.2)$$

在証明此定理之前，我們引进以下的定理：

定理 2.3.2. 若 a, c 是实数，b 是复数，$a<0$，$|b|^2-ac>0$，$\lambda>-1$，則

$$\iint\limits_{c+b\bar z+\bar b z+az\bar z>0} (c+b\bar z+\bar b z+az\bar z)^\lambda \dot z = \frac{1}{|a|}\left(\frac{|b|^2-ac}{|a|}\right)^{\lambda+1}\frac{\pi}{\lambda+1}. \quad (2.3.3)$$

証：命

$$w = \left(z+\frac{b}{a}\right)\sqrt{\frac{a^2}{|b|^2-ac}},$$

則

$$\dot w = \frac{a^2}{|b|^2-ac}\dot z$$

及

$$c+b\bar z+\bar b z+az\bar z = c-\frac{|b|^2}{a}+a\left(z+\frac{b}{a}\right)\overline{\left(z+\frac{b}{a}\right)} = \left(c-\frac{|b|^2}{a}\right)(1-w\bar w).$$

所以 (2.3.3) 的左边等于

$$\frac{1}{|a|}\left(\frac{|b|^2-ac}{|a|}\right)^{\lambda+1}\iint\limits_{1-w\bar w>0}(1-w\bar w)^\lambda \dot w = \frac{1}{|a|}\left(\frac{|b|^2-ac}{|a|}\right)^{\lambda+1}\frac{\pi}{\lambda+1}.$$

定理 2.3.1 的証明：命

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & v' \\ v & z \end{pmatrix},$$

此处 Z_1 是一 $n-1$ 行列的对称方陣，v 是一 $n-1$ 維的矢量，z 是一复数，于是

$$I - Z\bar Z = \begin{pmatrix} I-Z_1\bar Z_1-v'\bar v & -(Z_1\bar v'+v'\bar z) \\ -(v\bar Z_1+z\bar v) & 1-v\bar v'-z\bar z \end{pmatrix}.$$

利用 (2.1.9)，可知 $I-Z\bar Z>0$ 与下列二式：

$$I - Z_1\bar Z_1 - v'\bar v > 0$$

及

$$1 - v\bar v' - z\bar z - (v\bar Z_1+z\bar v)(I-Z_1\bar Z_1-v'\bar v)^{-1}\overline{(v\bar Z_1+z\bar v)}' > 0$$

等价，且有

$$\det(I-Z\bar{Z})=$$

$$=(1-v\bar{v}'-z\bar{z}-(v\bar{Z}_1+z\bar{v})(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}(\overline{v\bar{Z}_1+z\bar{v}})')\det(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v}),$$

故所求的积分

$$J_n(\lambda)=\int\limits_{I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v}>0}\cdots\int\det(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{\lambda}\dot{Z}_1\dot{v}\iint\limits_{c+b\bar{z}+\bar{b}z+az\bar{z}>0}(c+b\bar{z}+\bar{b}z+az\bar{z})^{\lambda}\dot{z},$$

此处

$$a=-1-\bar{v}(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}v'(<0),$$
$$b=-v\bar{Z}_1(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}v',$$
$$c=1-v\bar{v}'-v\bar{Z}_1(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}Z_1\bar{v}'.$$

由于 $I-Z_1\bar{Z}_1$ 是定正的，所以有一非奇异方陣 Γ 存在使

$$I-Z_1\bar{Z}_1=\Gamma\bar{\Gamma}'.$$

又命

$$v'=\Gamma u',\qquad v=u\Gamma',$$

可知

$$\dot{v}=|\det\Gamma|^2\dot{u}=\det(I-Z_1\bar{Z}_1)\dot{u},$$
$$(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}=\bar{\Gamma}'^{-1}(I-u'\bar{u})^{-1}\Gamma^{-1}.$$

又因为

$$(I-u'\bar{u})^{-1}u'=\frac{u'}{1+\bar{u}u'},\qquad w(I-u'\bar{u})^{-1}\bar{w}'=w\bar{w}'+\frac{|wu'|^2}{1-\bar{u}u'},$$

此处 w 为一 $n-1$ 維矢量，可知

$$a=-(1+\bar{u}(I-u'\bar{u})^{-1}u')=-\frac{1}{1-\bar{u}u'},$$

$$b=-u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}(I-u'\bar{u})^{-1}u'=-\frac{u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}u'}{1-\bar{u}u'},$$

$$c=1-u\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{u}'-u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}(I-u'\bar{u})^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{u}'$$

$$=1-u\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{u}'-u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{u}'-\frac{|u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}u'|^2}{1-\bar{u}u'}.$$

于是得出

$$|b|^2-ac=\frac{1}{1-\bar{u}u'}(1-u\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{u}'-u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{u}')$$

$$=\frac{1}{1-\bar{u}u'}(1-u\Gamma'(I+\bar{Z}_1(I-Z_1\bar{Z}_1)^{-1}Z_1)\bar{\Gamma}\bar{u}')$$

$$= \frac{1}{1-\bar{u}u'}(1-u\Gamma'(I-\bar{Z}_1Z_1)^{-1}\bar{\Gamma}\bar{u}') = 1.$$

故由定理 2.3.2 及

$$\det(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v}) = \det(I - u'\bar{u})\det(I - Z_1\bar{Z}_1)$$
$$= (1-\bar{u}u')\det(I - Z_1\bar{Z}_1),$$

可知

$$J_n(\lambda) = \frac{\pi}{\lambda+1}\int\cdots\int_{I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v}>0} \frac{(\det(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v}))^{\lambda}}{(1+\bar{v}(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}v')^{\lambda+2}}\dot{Z}_1\dot{v}$$
$$= \frac{\pi}{\lambda+1}\int\cdots\int_{I-Z_1\bar{Z}_1>0}(\det(I-Z_1\bar{Z}_1))^{\lambda+1}\dot{Z}_1\int\cdots\int_{I-u'\bar{u}>0}(1-\bar{u}u')^{2\lambda+2}\dot{u}$$
$$= \frac{\pi}{\lambda+1}\int\cdots\int_{I-Z_1\bar{Z}_1>0}(\det(I-Z_1\bar{Z}_1))^{\lambda+1}\dot{Z}_1\int\cdots\int_{1-\bar{u}u'>0}(1-\bar{u}u')^{2\lambda+2}\dot{u}$$

(由定理 2.2.2)．由 (2.2.6) 可知

$$J_n(\lambda) = J_{n-1}(\lambda+1)\frac{\pi^n}{\lambda+1}\frac{\Gamma(2\lambda+3)}{\Gamma(2\lambda+n+2)}. \tag{2.3.4}$$

續行此法，并直接算出 $n=1$ 的情况可得

$$J_n(\lambda) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)}\frac{\Gamma(2\lambda+3)\Gamma(2\lambda+5)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-1)}{\Gamma(2\lambda+n+2)\Gamma(2\lambda+n+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2n)}.$$

§ 2.4.　斜对称方陣双曲空間的总体积

定理 2.4.1.　命 $n \geqslant 2$，$Z(=Z^{(n)}=-Z')$ 表斜对称方陣；并命

$$K_n(\lambda) = \int\cdots\int_{I+Z\bar{Z}>0}\det(I+Z\bar{Z})^{\lambda}\dot{Z},$$

則当 $\lambda > -\frac{1}{2}$ 时

$$K_n(\lambda) = \pi^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{\Gamma(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-3)}{\Gamma(2\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n+1)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-2)}. \tag{2.4.1}$$

特别如 $\lambda=0$，則得斜对称方陣双曲空間 $\mathfrak{R}_{\text{III}}$ 的体积等于

$$V(\mathfrak{R}_{\text{III}}) = \pi^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{2!\,4!\cdots(2n-4)!}{(n-1)!\,n!\cdots(2n-3)!}. \tag{2.4.2}$$

証：命

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & -u' \\ u & 0 \end{pmatrix},$$

此处 Z_1 是 $n-1$ 行列的斜对称方陣，u 是一 $n-1$ 維矢量，則

$$I + Z\bar{Z} = \begin{pmatrix} I + Z_1\bar{Z}_1 - u'\bar{u} & -Z_1\bar{u}' \\ u\bar{Z}_1 & 1 - u\bar{u}' \end{pmatrix}.$$

由 (2.1.9) 可知 $I + Z\bar{Z} > 0$ 与下列二式:

$$I + Z_1\bar{Z}_1 - u'\bar{u} > 0 \tag{2.4.3}$$

及

$$1 - u\bar{u}' + u\bar{Z}_1(I + Z_1\bar{Z}_1 - u'\bar{u})^{-1}Z_1\bar{u}' > 0 \tag{2.4.4}$$

等价，并可知

$$\det(I + Z\bar{Z}) = (1 - u\bar{u}' + u\bar{Z}_1(I + Z_1\bar{Z}_1 - u'\bar{u})^{-1}Z_1\bar{u}')\det(I + Z_1\bar{Z}_1 - u'\bar{u}).$$

命 $I + Z_1\bar{Z}_1 = \Gamma\bar{\Gamma}'$, $u = v\Gamma'$, 由 (2.4.3) 可知

$$I + Z_1\bar{Z}_1 > 0 \quad 及 \quad I - v'\bar{v} > 0.$$

(2.4.4) 的左边等于

$$\begin{aligned} 1 - v\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{v}' &+ v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}(I - v'\bar{v})^{-1}\Gamma^{-1}\bar{Z}_1\Gamma\bar{v}' \\ &= 1 - v\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{v}' + v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{v}' - |v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}v'|^2/(1 - \bar{v}v') \\ &= 1 - v\Gamma'(I + \bar{Z}_1Z_1)^{-1}\bar{\Gamma}\bar{v}' - |v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}v'|^2/(1 - \bar{v}v') \\ &= 1 - v\bar{v}' - |v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}v'|^2/(1 - \bar{v}v') \\ &= 1 - v\bar{v}', \end{aligned}$$

此处用了 $\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}$ 是斜对称的性質，因此得出(由定理 2.2.2)

$$K_n(\lambda) = \int\cdots\int_{I+Z_1\bar{Z}_1>0} (\det(I + Z_1\bar{Z}_1))^{\lambda+1}\dot{Z}_1 \iint_{I-v'\bar{v}>0} (1 - v\bar{v}')^{2\lambda}\dot{v}$$

$$= \pi^{n-1}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(2\lambda+n)}K_{n-1}(\lambda+1).$$

續行此法并最后算出

$$K_2(\lambda + n - 2) = \iint_{|z|<1} (1 - |z|^2)^{2\lambda+2n-4}\dot{z} = \pi\frac{\Gamma(2\lambda+2n-3)}{\Gamma(2\lambda+2n-2)},$$

卽得定理.

§ 2.5. 超球双曲空間的总体积

今往研究超球双曲空間 $\mathfrak{R}_{\rm IV}$: 命 z 代表 n 維矢量 $(z_1, \cdots, z_n)$, $\mathfrak{R}_{\rm IV}$ 乃适合于

$$|zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0 \tag{2.5.1}$$

及

$$|zz'| < 1 \tag{2.5.2}$$

的 z 所成的集合. 先把此域的定义换一种說法. 由 (2.5.1) 及 (2.5.2) 可知

$$(1-\bar{z}z')^2 > (\bar{z}z')^2 - |zz'|^2 > (\bar{z}z')^2 - 1. \tag{2.5.3}$$

由 (2.5.3) 易見

$$\bar{z}z' < 1. \tag{2.5.4}$$

从 (2.5.3) 的左一半及 $\bar{z}z' \geqslant |zz'|$，可知

$$1 - \bar{z}z' > \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}, \tag{2.5.5}$$

所以凡适合于 (2.5.1) 及 (2.5.2) 的点一定适合 (2.5.5).

反之，凡适合 (2.5.5) 的点，显然适合 (2.5.1). 又由 $|zz'| \leqslant \bar{z}z'$ 及 (2.5.5) 可得 $|zz'| < 1$，即 (2.5.2)，故 $\mathfrak{R}_{IV}$ 可由 (2.5.5) 来定义.

定理 2.5.1. 若 $\alpha > -1$，$\beta > -(n+\alpha)$，則

$$L_n(\alpha,\beta) = \int\cdots\int_{\mathfrak{R}_{IV}} (1 - \bar{z}z' - \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2})^\alpha (1 - \bar{z}z' + \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2})^\beta \dot{z}$$

$$= \frac{\pi^n}{2^{n-1}} \frac{1}{\alpha+\beta+n} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)}. \tag{2.5.6}$$

又当 $\alpha = \beta = 0$，則得 $\mathfrak{R}_{IV}$ 的体积等于

$$V(\mathfrak{R}_{IV}) = \frac{\pi^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{n!}. \tag{2.5.7}$$

証: 当 $n = 1$ 时. 命 $z = x + iy$，x, y 是实数，此时

$$\bar{z}z' = |zz'| = x^2 + y^2,$$

故 $\mathfrak{R}_{IV}$ 即为复平面上的单位圓；因而得出

$$L_1(\alpha,\beta) = \iint_{x^2+y^2<1} (1 - x^2 - y^2)^{\alpha+\beta}\, dx\, dy = \frac{\pi}{\alpha+\beta+1}.$$

定理已明.

当 $n \geqslant 2$ 时. 命 $z = x + iy$，此处 x, y 是实矢量，(2.5.5) 变为

$$1 - xx' - yy > 2\sqrt{xx'yy' - (xy')^2}, \tag{2.5.8}$$

因此

$$L_n(\alpha,\beta) = \int\cdots\int_{x,\,y} (1 - xx' - yy' - 2\sqrt{xx'yy' - (xy')^2})^\alpha \times$$

$$\times (1 - xx' - yy' + 2\sqrt{xx'yy' - (xy')^2})^\beta \dot{x}\dot{y}.$$

此积分展布于 (2.5.8) 上. 对一固定的 x，有一行列式为 1 的正交方陣 R 使

$$xR = (\sqrt{xx'}, 0, \cdots, 0).$$

对 y 行变换 $yR=(\xi,w)$，此处 ξ 是一实数，w 是一 $n-1$ 維实的矢量，如此則 (2.5.8) 变为

$$1-xx'-\xi^2-ww'>2\sqrt{xx'(\xi^2+ww')-xx'\xi^2}=2\sqrt{xx'ww'}. \tag{2.5.9}$$

因之所求积分等于

$$L_n(\alpha,\beta)=\int\cdots\int_{\xi,w,x}(1-\xi^2-xx'-ww'-2\sqrt{xx'ww'})^\alpha\times$$

$$\times(1-\xi^2-xx'-ww'+2\sqrt{xx'ww'})^\beta\,d\xi\,\dot{w}\dot{x},$$

此积分展布于 (2.5.9).

命 $x=\sqrt{1-\xi^2}\,u$, $w=\sqrt{1-\xi^2}\,v$，可得

$$L_n(\alpha,\beta)=\int_{-1}^1(1-\xi^2)^{\alpha+\beta+\frac{1}{2}(2n-1)}\,d\xi\int\cdots\int_{1-uu'-vv'>2\sqrt{uu'vv'}}(1-uu'-vv'-2\sqrt{uu'vv'})^\alpha\times$$

$$\times(1-uu'-vv'+2\sqrt{uu'vv'})^\beta\,\dot{u}\dot{v}$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\cdot 2^{2n-1}P, \tag{2.5.10}$$

此处

$$P=\int\cdots\int_{\substack{1-uu'-vv'>2\sqrt{uu'vv'}\\ u_\mu>0,\ v_\nu>0}}(1-uu'-vv'-2\sqrt{uu'vv'})^\alpha(1-uu'-vv'+2\sqrt{uu'vv'})^\beta\,\dot{u}\dot{v}.$$

命 $\eta^2=uu'$, $\zeta^2=vv'$，則

$$P=\iint_{\substack{\eta+\zeta<1\\ \eta>0,\zeta>0}}(1-(\eta+\zeta)^2)^\alpha(1-(\eta-\zeta)^2)^\beta\,d\eta\,d\zeta\int\cdots\int_{\substack{u_2^2+\cdots+u_n^2<\eta^2\\ u_\mu>0}}\frac{\eta\,du_2\cdots du_n}{\sqrt{\eta^2-u_2^2-\cdots-u_n^2}}\times$$

$$\times\int\cdots\int_{\substack{v_3^2+\cdots+v_n^2<\zeta^2\\ v_\nu>0}}\frac{\zeta\,dv_3\cdots dv_n}{\sqrt{\zeta^2-v_3^2-\cdots-v_n^2}}. \tag{2.5.11}$$

由于

$$\int\cdots\int_{\substack{u_2^2+\cdots+u_n^2<\eta^2\\ u_\mu>0}}\frac{\eta\,du_2\cdots du_n}{\sqrt{\eta^2-u_2^2-\cdots-u_n^2}}=\eta^{n-1}\int\cdots\int_{\substack{u_2^2+\cdots+u_n^2\leqslant 1\\ u_\mu>0}}\frac{du_2\cdots du_n}{\sqrt{1-u_2^2-\cdots-u_n^2}}=$$

$$=\eta^{n-1}\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{2^{n-1}}, \tag{2.5.12}$$

将此結果代入 (2.5.11) 可得

$$P=\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2^{2n-3}}\iint\limits_{\substack{\eta+\zeta<1\\ \eta>0,\zeta>0}}(1-(\eta+\zeta)^2)^\alpha(1-(\eta-\zeta)^2)^\beta\eta^{n-1}\zeta^{n-2}\,d\eta\,d\zeta$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2^{2n-3}}\iint\limits_{\substack{\eta+\zeta<1\\ 0\leqslant\eta\leqslant\zeta}}(1-(\eta+\zeta)^2)^\alpha(1-(\eta-\zeta)^2)^\beta\eta^{n-2}\zeta^{n-2}(\eta+\zeta)\,d\eta\,d\zeta$$

(取 $\zeta-\eta=\tau$, $\zeta+\eta=\sigma$)

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2^{2n-3}}\iint\limits_{0\leqslant\tau\leqslant\sigma<1}(1-\sigma^2)^\alpha(1-\tau^2)^\beta\left(\frac{\sigma+\tau}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{\sigma-\tau}{2}\right)^{n-2}\sigma\frac{d\sigma\,d\tau}{2}$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2^{4n-6}}\int_0^1(1-\tau^2)^\beta d\tau\int_\tau^1(1-\sigma^2)^\alpha(\sigma^2-\tau^2)^{n-2}\sigma\,d\sigma$$

$\left(\text{命 } \omega=\dfrac{\sigma^2-\tau^2}{1-\tau^2},\quad 1-\omega=\dfrac{1-\sigma^2}{1-\tau^2}\right)$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2^{4n-5}}\int_0^1(1-\tau^2)^{\alpha+\beta+n-1}d\tau\int_0^1(1-\omega)^\alpha\omega^{n-2}\,d\omega$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{2^{4n-4}}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-1)}{\Gamma(\alpha+n)}.$$

代入 (2.5.10) 得到

$$L_n(\alpha,\beta)=\frac{1}{2^{2n-3}}\frac{\pi^{\frac{1}{2}(2n+1)}\Gamma(n-1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)}$$

$$=\frac{\pi^n}{2^{n-1}}\frac{1}{\alpha+\beta+n}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)}$$

$\left(\text{此处用了习知的公式: } \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x)\cdot 2^{1-2x}\right).$

第 三 章

方陣的极坐标

§ 3.1. 酉积分元素

将 n 行列的方陣 Z 看成为 $2n^2$ 維(实)空間的一点,則当 Z 过所有的酉方陣时,在 $2n^2$ 維空間中得出一維数是 n^2 的流形. n 行列的酉羣及它所代表的流形都以 $\mathfrak{U}_n$ 表之. 今往算出流形 $\mathfrak{U}_n$ 上的积分元素.

如把 Z 所經过的 $2n^2$ 維空間看做普通的欧几里得空間,这空間的基本微分二次型可以

$$\sigma(dZ\,d\bar{Z}') = \sum_{i,j=1}^{n} |dz_{ij}|^2$$

代表. 以 $Z=U$ (酉方陣)代入,由于

$$d\bar{U}' = -U^{-1}dU\,U^{-1},$$

所以在流形 $\mathfrak{U}_n$ 上的基本二次型等于

$$ds^2 = -\sigma(dU\,U^{-1}dU\,U^{-1}). \tag{3.1.1}$$

命

$$\delta U = U^{-1}dU = \bar{U}'dU, \tag{3.1.2}$$

由于 $o = d(I) = d(\bar{U}'U) = \bar{U}'dU + d\bar{U}'U$, 因此

$$\overline{\delta U}' = -\delta U; \tag{3.1.3}$$

故 (3.1.1) 可以写成为

$$ds^2 = \sigma(\delta U\,\overline{\delta U}'). \tag{3.1.4}$$

把 δU 写成为 (δu_{jk}), 由 (3.1.3) 可知 $\delta u_{jk} = -\overline{\delta u_{kj}}$. 代进 (3.1.4) 可得

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^{n} |\delta u_{jk}|^2. \tag{3.1.5}$$

写成实向量 $\delta u_{jj} = i\delta s_j$, $\delta u_{jk} = \delta s_{jk} + i\delta s'_{jk}$, $\delta u_{kj} = -\delta s_{jk} + i\delta s'_{jk}$ $(j<k)$, 故

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} \delta s_j^2 + 2\sum_{i<k}((\delta s_{jk})^2 + (\delta s'_{jk})^2). \tag{3.1.6}$$

因此 $\mathfrak{U}_n$ 上的积分元素

$$\dot{U} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} \delta s_j \prod_{i<k} (\delta s_{jk}\delta s'_{jk}). \tag{3.1.7}$$

命 V 及 W 表任二固定的酉方陣,則从变形

$$U_1 = V\,U\,W \tag{3.1.8}$$

可得

$$\delta U_1 = \bar{W}'\,\delta U\,W;$$

故

$$\sigma(\delta U_1\overline{\delta U_1'}) = \sigma(\overline{W}'\delta U\overline{\delta U}'W) = \sigma(\delta U\overline{\delta U'}). \qquad (3.1.9)$$

因此得出

$$\dot{U}_1 = \dot{U}. \qquad (3.1.10)$$

这是酉积分元素經变形 (3.1.8) 的不变性.

今往引进酉方陣的裹变数表示法. 在此种表示法之下,酉积分更清楚. 命

$$U = (I + iH)(I - iH)^{-1}, \qquad (3.1.11)$$

不难証明, H 是一爱尔米方陣; 这 H 称为裹变数. (3.1.11) 的逆变换是:

$$H = i(I - U)(I + U)^{-1}. \qquad (3.1.12)$$

不难証明:一般說来从酉羣 $\mathfrak{U}_n$ 到 n 行列的爱尔米方陣的集合是一对一的. 所謂"一般說来"乃指可能有較低維的流形是例外,如 $\det(I + U) = 0$ 及 $\det(I - iH) = 0$ 的两个流形[1].

微分 (3.1.11) 可得

$$\begin{aligned} dU &= i\,dH(I - iH)^{-1} + i(I + iH)(I - iH)^{-1}dH(I - iH)^{-1} \\ &= 2i(I - iH)^{-1}dH(I - iH)^{-1}, \end{aligned}$$

故得

$$\delta U = 2i(I + iH)^{-1}dH(I - iH)^{-1}. \qquad (3.1.13)$$

因此得出

$$\sigma(\delta U\overline{\delta U'}) = 4\sigma((I + H^2)^{-1}dH(I + H^2)^{-1}dH),$$

所以

$$\dot{U} = 2^{n^2}\det(I + H^2)^{-n}\dot{H}, \qquad (3.1.14)$$

此处 $\dot{H} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=1}^{n} dh_j \prod_{j<k}(dh'_{jk}\,dh''_{jk})$, 而 $H = (h_{jk})$, $h_{jj} = h_j$, $h_{jk} = h'_{jk} + ih''_{jk}$. 在这种表示法下,酉方陣的流形一变而为

$$-\infty < h_j < \infty, \qquad -\infty < h'_{jk}, h''_{jk} < \infty. \qquad (3.1.15)$$

当然必須除去一个較低維的例外流形.

定理 3.1.1. 酉流形 $\mathfrak{U}_n$ 的体积等于

$$\varpi_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1!2!\cdots(n-1)!}.$$

証: 由 (3.1.4) 可知

$$\varpi_n = \int\cdots\int_U \dot{U} = 2^{n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int(\det(I + H^2)^{-n}\dot{H};$$

再由定理 2.1.5 可知

$$\varpi_n = 2^{n^2}2^{\frac{n(n-1)}{2}}\pi^{\frac{1}{2}n^2}\frac{\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma\left(n - j - \frac{1}{2}\right)\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma(n-k)}{\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma(n-j)\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma(2n-2k-1)}.$$

1) $\det(I+iH) = 0$ 是永不可能的.

由于 $\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)2^{1-2x}$，可知

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(\Gamma(n-j)\Gamma(n-j-\frac{1}{2})\right)=\pi^{\frac{n}{2}}\prod_{j=0}^{n-1}(\Gamma(2n-2j-1)2^{2-2n+2j})$$

$$=\pi^{\frac{n}{2}}2^{-n(n-1)}\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma(2n-2k-1).$$

故得定理.

附記 1. 有些书上用 $\prod_{j=1}^{n}\delta s_j\prod_{j<k}(\delta s_{jk}\,\delta s'_{jk})$ 作为酉羣的积分元素，它和 (3.1.7) 差一个常数因子 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

附記 2. 在襄变数表示法 (3.1.11) 中，例外的部分可以設法免除. 免除的方法是引进爱尔米方陣的齐次坐标，即利用爱尔米方陣的射影几何学的方法，本书中不加敍述.

§ 3.2. 酉羣的傍系的积分

任一酉方陣 U 可以表成为

$$U=V\Lambda V^{-1},\quad \Lambda=[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}],\quad 2\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant 0,\tag{3.2.1}$$

此处 V 是酉方陣. 因 $e^{i\theta_j}(1\leqslant j\leqslant n)$ 是 U 的特征根，故 Λ 是唯一的. 又若

$$U=V\Lambda V^{-1}=V_1\Lambda V_1^{-1},$$

如果 U 的特征根各不相同，則得出 $V_1^{-1}V=W=[e^{i\varphi_1},\cdots,e^{i\varphi_n}]$. 所有形如 $W=[e^{i\varphi_1},\cdots,e^{i\varphi_n}]$ 的酉方陣組成 $\mathfrak{U}_n$ 的一个子羣. 命 $[\mathfrak{U}_n]$ 表 $\mathfrak{U}_n$ 对此子羣的傍系的集合，則 V_1 与 V 属于同一个傍系. 于是，一般言之，任一 U 方陣必一一对应于一个 Λ 及 $[\mathfrak{U}_n]$ 中的一个傍系. 今往求出酉积分元素和 Λ 的积分元素以及 $[\mathfrak{U}_n]$ 的积分元素間的关系.

微分 (3.2.1)

$$dU=dV\Lambda V^{-1}-V\Lambda V^{-1}dV\,V^{-1}+Vd\Lambda V^{-1},$$

即得

$$\overline{V}'dU\,V=\delta V\Lambda-\Lambda\delta V+d\Lambda,$$

故

$$\sigma(dU\,\overline{dU}')=\sigma((\delta V\Lambda-\Lambda\delta V)(\overline{\delta V\Lambda-\Lambda\delta V})')+\sigma((\delta V\Lambda-\Lambda\delta V)\overline{d\Lambda}')$$
$$+\sigma(d\Lambda(\overline{\delta V\Lambda-\Lambda\delta V})')+\sigma(d\Lambda\overline{d\Lambda}').$$

由于 $\sigma((\delta V\Lambda-\Lambda\delta V)\overline{d\Lambda}')=0$，并命 $\delta V=(\delta v_{jk})$，即知

$$\sigma(dU\,\overline{dU}')=\sum_{j,k=1}^{n}|\delta v_{jk}(e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k})|^2+\sum_{j=1}^{n}d\theta_j^2,$$

注意此处 δv_{jj} 并不出現. 由微分矢量所张成的积分元素以 $\dot{V}$ 表之，而以 $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\dot{V}=[\dot{U}]$ 表 $[U]$ 上的积分元素. 于是得出

$$\dot{U}=[\dot{U}]\prod_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2d\theta_1\cdots d\theta_n.\tag{3.2.2}$$

定理 3.2.1. 傍系集合 $[\mathfrak{U}_n]$ 的体积等于

$$\varpi_n' = \frac{(2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!2!\cdots(n-1)!}.$$

証：

$$\varpi_n = \varpi_n' \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\theta_1} d\theta_2 \cdots \int_0^{\theta_{n-1}} \prod_{j<k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 d\theta_n$$

$$= \frac{\varpi_n'}{n!} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \prod_{j<k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

把

$$\prod_{j<k} (e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k})$$

表成为

$$\sum_j \delta_{j_1\cdots j_n} e^{i((n-1)\theta_{j_1}+(n-2)\theta_{j_2}+\cdots+\theta_{j_{n-1}})}$$

(共有 $n!$ 項)，由于 $e^{i(m_1\theta_1+\cdots+m_n\theta_n)}$ 的正交性，因之得出

$$\varpi_n = (2\pi)^n \varpi_n'.$$

定理得証.

現在我們再来討論另一傍系集合 $\{\mathfrak{U}_n\}$，其子羣是由形如 $[\pm 1, \cdots, \pm 1]$ 的 2^n 个方陣所組成的. 任一酉方陣 U 可以 $[\mathfrak{U}_n]$ 中的一个傍系 $[U]$ 及一个对角綫方陣 $\Lambda = [e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots, e^{i\theta_n}]$ $(0 \leqslant \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_n \leqslant 2\pi)$ 表之. 又 $\{\mathfrak{U}_n\}$ 的一元可以看成为一个如次定义的集合：由諸傍系 $[U]$ 及所有 $\Lambda = [e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}]$ $(0 \leqslant \theta_1, \cdots, \theta_n \leqslant \pi)$ 所成的集合，故 $\{\mathfrak{U}_n\}$ 的总体积等于 $2^{-n}\varpi_n$.

§ 3.3. 爱尔米方陣的极坐标

习知任一爱尔米方陣 H 可以表成为

$$H = U\Lambda\bar{U}', \tag{3.3.1}$$

此处 U 是酉方陣，$\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ 是一对角綫方陣

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n.$$

(U, Λ) 可以称为爱尔米方陣的极坐标，其中 Λ 对应于普通极坐标中的向径，而 U 对应于輻角. 但現在的缺点是其間的对应不是一对一的. 若

$$H = U\Lambda\bar{U}' = U_1\Lambda_1\bar{U}_1',$$

則显然有 $\Lambda = \Lambda_1$；如果 H 的特征根各各不同，則得出 $U_1^{-1}U = V = [e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}]$，即 $U = U_1V$. 因此一般説来，H 到 $([\mathfrak{U}_n], \Lambda)$ 的对应是一对一的，盖 H 有重根时，即成一較低維的流形时是例外.

微分 (3.3.1) 可得

$$dH = dU\Lambda\bar{U}' + U\,d\Lambda\bar{U}' + U\Lambda d\bar{U}',$$

故

$$\bar{U}'dH\,U = \delta U\Lambda + d\Lambda - \Lambda\delta U.$$

命 $\bar{U}'dH\,U = \delta G$ 及 $\delta G = (\delta g_{jk})$，則

$$\delta g_{jk} = \delta u_{jk}(\lambda_k - \lambda_j) \qquad (j \neq k),$$

$$\delta g_{jj} = d\lambda_j.$$

分开 δg_{jk} 的虚实部分，可得

$$\dot{H} = \prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^2 d\lambda_1 \cdots d\lambda_n[\dot{U}], \tag{3.3.2}$$

因而得出

$$\det(I + H^2)^{-n}\dot{H} = \prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^2 \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i^2)^{-n} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n[\dot{U}]. \tag{3.3.3}$$

命

$$e^{i\theta_j} = (1 + i\lambda_j)(1 - i\lambda_j)^{-1},$$

則因 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$，故可命 $\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi$；又

$$\prod_{j<k}(e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}) = \prod_{j<k}(2i(\lambda_j - \lambda_k)) \prod_{k=1}^{n}(1 - i\lambda_k)^{-(n-1)},$$

于是

$$\prod_{j<k}|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 = 2^{n(n-1)} \prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^2 \prod_{k=1}^{n}(1 + \lambda_k^2)^{-(n-1)};$$

又因

$$d\theta_j = \frac{2\,d\lambda_j}{(1 + \lambda_j^2)}$$

及 (3.1.14)，所以得出

$$\dot{U} = \prod_{j<k}|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_n[\dot{U}], \tag{3.3.4}$$

此处 $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$ 是 U 的特征根，且 $\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant -\pi$.

§ 3.4. 方陣的极坐标

今往討論任意 n 行列的方陣的极坐标. 已知任一方陣 Z 可以表成为

$$Z = U\Lambda V, \tag{3.4.1}$$

此处 U 及 V 是 n 行列的酉方陣，$\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ 是一对角綫方陣，其对角綫上的元素适合于

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0.$$

此 (U, Λ, V) 可以称为 Z 的极坐标，但須注意 Z 与 (U, Λ, V) 之間的关系，并非一一对应的. 但是，今将証明，Z 所成的集合除去較低維空間的流形外，与 $[\mathfrak{U}_n] \times \Lambda \times \mathfrak{U}_n$ 一一对应. 假定

$$Z = U\Lambda V = U_1\Lambda_1 V_1,$$

由于 $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2$ 是 $Z\bar{Z}'$ 的特征根，因此 $\Lambda = \Lambda_1$. 又命 $U_1^{-1}U = U_2$，則

$$U_2\Lambda^2\bar{U}_2' = \Lambda^2;$$

今假定諸 λ_μ 互不相等，則得 U_2 是一对角綫酉方陣. 因得以上所陈述的結果. 仅須注意

$Z\bar{Z}'$ 有重特征根的情况时，Z 成一較低維的流形.

注意：$\mathfrak{U}_n$ 的維数(实)是 n^2，$[\mathfrak{U}_n]$ 的維数是 n^2-n，Λ 的維数是 n，故 $[\mathfrak{U}_n]\times\Lambda\times\mathfrak{U}_n$ 的維数确实与 Z 的維数 $2n^2$ 相等.

今往研究变形 (3.4.1) 的函数行列式. 为了易于了解及将来引用方便計，今分步地完成坐标变换的手續.

1) 习知任一定正爱尔米方陣 H 可以唯一地表成为 $T\bar{T}'$，此处 T 乃一三角方陣，其右上半皆为零，其对角綫上皆为正实数.

把 H 写成为 (h_{jk}) 并命 $h_{jj}=h_j$ 及 $h_{jk}=h'_{jk}+ih''_{jk}\ (j>k)$，此处 h_j, h'_{jk}, h''_{jk} 都是实数，共有 n^2 个；又命

$$\dot{H}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=1}^{n}dh_j\prod_{j>k}(dh'_{jk}\,dh''_{jk})$$

表爱尔米方陣的体积元素.

把 T 写成为 $T=(t_{jk})$，$t_{jj}=t_j$，$t_{jk}=t'_{jk}+it''_{jk}\ (j>k)$，此处 t_j, t'_{jk}, t''_{jk} 都是实数，且命

$$\dot{T}=\prod_{j=1}^{n}dt_j\prod_{j>k}(dt'_{jk}\,dt''_{jk})$$

表三角方陣所成的流形的体积元素.

定理 3.4.1. 我們有次之等式

$$\dot{H}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_{n-1}^3t_n\dot{T}.$$

証：今用归納法来証明这一定理. 当 $n=1$ 时，因 $h_1=t_1^2$，此定理显然眞实. 命

$$H=\begin{pmatrix}H_1 & \bar{v}'\\ v & h_n\end{pmatrix},\qquad T=\begin{pmatrix}T_1 & 0\\ \tau & t_n\end{pmatrix},$$

由 $H=T\bar{T}'$ 可得

$$H_1=T_1\bar{T}_1',\quad v=\tau\bar{T}_1',\quad h_n=\tau\bar{\tau}'+t_n^2.$$

容易算出，v 与 τ 間的函数行列式 $\dfrac{\partial(v)}{\partial(\tau)}=|\det T_1|^2$，$\dfrac{\partial h_n}{\partial t_n}=2t_n$，故得

$$\prod_{k=1}^{n-1}dh'_{nk}\,dh''_{nk}=|\det T_1|^2\prod_{k=1}^{n-1}(dt'_{nk}\,dt''_{nk})=(t_1\cdots t_{n-1})^2\prod_{k=1}^{n-1}(dt'_{nk}\,dt''_{nk}).$$

由归納法假定可知

$$\dot{H}=2^{n-1}\dot{H}_1\prod_{k=1}^{n-1}(dh'_{nk}\,dh''_{nk})\,dh_n=2^n(t_1\cdots t_{n-1})^2t_n\dot{H}_1\prod_{k=1}^{n}(dt'_{nk}\,dt''_{nk})\,dt_n$$

$$=2^n(t_1\cdots t_{n-1})^2t_n(2^{\frac{n(n-1)}{2}}t_1^{2(n-2)+1}\cdots t_{n-1})\dot{T}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_{n-1}^3t_n\dot{T}.$$

2) 对任一行列式不为零的方陣 Z，由 1) 可知有一如 1) 所述的三角方陣 T，使 $Z\bar{Z}'=T\bar{T}'$. 于是得出

定理 3.4.2. 任一非奇异的方陣 Z 可以唯一地表成为 TU 之形，此处 U 乃一酉方陣而 T 乃一三角方陣，其右上角为零而其对角綫上元素为正.

証： 由 $Z\bar{Z}' = T\bar{T}'$，故可令 $Z^{-1}T = U^{-1}$，即得 $Z = TU$.

又因一个右上方为零且对角綫上元素为正数的三角方陣为酉方陣的必要且充分之条件为此方陣为 I，故若

$$Z = TU = T_1U_1,$$

则必 $T = T_1$，从而 $U = U_1$.

定理 3.4.3. 由定理 3.4.2 中 Z 之表示法所得出之体积元素間的关系如次：

$$\dot{Z} = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} t_1^{2(n-1)+1} \cdots t_{n-1}^3 t_n \dot{T}\dot{U}, \tag{3.4.2}$$

此处 $\dot{U}$ 乃酉方陣的体积元素.

証： 由

$$Z = TU$$

可得出

$$dZ = dT\,U + T\,dU, \tag{3.4.3}$$

行列互换幷取其共軛虛数立得

$$d\bar{Z}' = U^{-1}d\bar{T}' + dU^{-1}\bar{T}' = U^{-1}d\bar{T}' - U^{-1}dU\,U^{-1}\bar{T}'.$$

命 $\delta U = dU\,U^{-1}$, $dP = dZ\,U^{-1}$ 及 $dQ = U\,d\bar{Z}'$，可得

$$\begin{cases} dP = dT + T\,\delta U, \\ dQ = d\bar{T}' - \delta U\,\bar{T}' \end{cases} \tag{3.4.4}$$

(此处之 δU 与 § 3.1 中所定义者不同，但 §3.1 中 δU 所具有之性質現在的 $\delta U = dU\,U^{-1}$ 亦均具备). 命 $\delta U = (dv_{jk})$.

将 (3.4.4) 依元素写出，即

$$dp_{jk} = dt_{jk} + \sum_{s=1}^{j} t_{js}\,dv_{sk},\quad 若\ j > k; \tag{3.4.5}$$

$$dq_{jk} = d\bar{t}_{kj} - \sum_{s=1}^{k} \bar{t}_{ks}\,dv_{js},\quad 若\ j < k; \tag{3.4.6}$$

$$dp_{jj} = dt_j + \sum_{s=1}^{j} t_{js}\,dv_{sj}; \tag{3.4.7}$$

$$dp_{jk} = \sum_{s=1}^{j} t_{js}\,dv_{sk},\quad 若\ j < k; \tag{3.4.8}$$

$$dq_{jk} = - \sum_{s=1}^{k} \bar{t}_{ks}\,dv_{js},\quad 若\ j > k; \tag{3.4.9}$$

$$dq_{jj} = dt_j - \sum_{s=1}^{j} \bar{t}_{js}\,dv_{js}; \tag{3.4.10}$$

又由 (3.4.7) 中減去 (3.4.10) 得出

$$d(p_{jj}-q_{jj})=\sum_{s=1}^{j-1} t_{js}\,dv_{sj}+2t_j\,dv_{jj}+\sum_{s=1}^{j-1}\bar{t}_{js}\,dv_{js}. \qquad (3.4.11)$$

今往算出下列函数行列式之值:

$$J=\left|\frac{\partial(p_{ik}(i>k),\ q_{ik}(j<k),\ p_{jj}(1\leqslant j\leqslant n),\ p_{jk}(j<k),\ q_{jk}(j>k),\ p_{jj}-q_{jj}(1\leqslant j\leqslant n))}{\partial(t_{jk}(j>k),\bar{t}_{kj}(j<k),\ t_j,v_{jk}(1\leqslant j,k\leqslant n))}\right|,$$

由 (3.4.8), (3.4.9) 及 (3.4.11), 其中无有 dt_{jk}, $d\bar{t}_{kj}$ 及 dt_j, 故得

$$J=\left|\frac{\partial(p_{jk}(j<k),\ q_{jk}(j>k),\ p_{jj}-q_{jj}(1\leqslant j\leqslant n))}{\partial(v_{jk}(1\leqslant j,\ k\leqslant n))}\right|.$$

又在 (3.4.8) 中仅有 $dv_{pq}(p<q)$, 在 (3.4.9) 中仅有 $dv_{pq}(p>q)$; 若 $dp_{jk}(j<k)$ 写成 $dv_{pq}(p<q)$ 之綫性变換,其方陣乃一三角形者, 而其行列式之值为 $t_1^{(n-1)}t_2^{(n-2)}\cdots t_{n-1}$, 故得出

$$J=2^n t_1^{2(n-1)+1}t_2^{2(n-2)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n. \qquad (3.4.12)$$

由于若 $z=x+iy$, 則

$$\left|\frac{\partial(z,\bar{z})}{\partial(x,y)}\right|=2,$$

故

$$\left|\frac{\partial(p_{jk},\ q_{jk})}{\partial(t'_{jk},\ t''_{jk},\ t_j,\ v_{jk})}\right|=2^{n(n-1)}\left|\frac{\partial(p_{jk},\ q_{jk})}{\partial(t_{jk},\ \bar{t}_{jk},\ t_j,\ v_{jk})}\right|.$$

由此立得

$$\left|\frac{\partial(P,Q)}{\partial(T,V)}\right|=2^{n^2}t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n.$$

又因

$$\left|\frac{\partial(Z,\bar{Z})}{\partial(P,Q)}\right|=1,\qquad \left|\frac{\partial(Z,\bar{Z})}{\partial(X,Y)}\right|=2^{n^2},$$

故最后得出

$$\dot{Z}=2^{-\frac{n(n-1)}{2}}t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n\dot{T}\dot{U}.$$

3) 极坐标的体积元素:

定理 3.4.4. 由 (3.4.1) 所表出的 Z 与 $[\mathfrak{U}_n]\times\Lambda\times\mathfrak{U}_n$ 之关系的体积元素之关系为

$$\dot{Z}=D^2(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\,d\lambda_1\cdots d\lambda_n\dot{U}[\dot{U}]. \qquad (3.4.13)$$

証: 命

$$Z\bar{Z}'=H,\quad H=T\bar{T}',$$

由定理 3.4.3 可得

$$\dot{Z}=t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n\dot{T}\dot{U}.$$

又由定理 3.4.1 可知

$$\dot{Z} = 2^{-n^2}\dot{H}\dot{U},$$

再由 (3.3.2) 可知

$$\dot{Z} = D^2(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)d\lambda_1\cdots d\lambda_n \dot{H}[\dot{U}].$$

§ 3.5. 对称方陣的极坐标

命 Z 表一复元素的对称方陣，作者(华罗庚 [1]) 曾經証明任一对称方陣可以表成为

$$Z = U\Lambda U', \tag{3.5.1}$$

此处 U 是酉方陣，而 $\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ 是对角綫方陣，其对角綫上的元素适合于

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0.$$

命 $\{\mathfrak{U}_n\}$ 代表酉羣 $\mathfrak{U}_n$ 对其分羣 $[\pm 1, \cdots, \pm 1]$ 所成的左傍系的集合，如此則易証：一般来說 Z 与 $\{\mathfrak{U}_n\} \times \Lambda$ 之間的对应是一对一的.

微分 (3.5.1) 可知

$$dZ = dU\Lambda U' + U\,d\Lambda U' + U\Lambda\,dU',$$
$$\overline{U}'dZ\,\overline{U} = \delta U\Lambda + d\Lambda + \Lambda\delta U',$$

此处 $\delta U = \overline{U}'dU$，可得

$$\begin{aligned}\sigma(dZ\,d\overline{Z}') &= \sigma(\overline{U}'dZ\,\overline{U}\,U'd\overline{Z}'U)\\ &= \sigma((\delta U\Lambda + d\Lambda + \Lambda\delta U')(\Lambda\delta\overline{U}' + d\Lambda + \delta\overline{U}\Lambda))\\ &= \sigma(d\Lambda\,d\Lambda) + \sigma((\delta U\Lambda + \Lambda\delta U')(\Lambda\delta\overline{U}' + \delta\overline{U}\Lambda)).\end{aligned}$$

命

$$(\delta U\Lambda + \Lambda\delta U') = (dg_{jk}) \qquad (dg_{jk} = dg_{kj}),$$

則

$$\sigma(dZ\,d\overline{Z}') = \sum_{j=1}^{n} d\lambda_j^2 + \sum_{j=1}^{n}|dg_{jj}|^2 + 2\sum_{j<k}|dg_{jk}|^2,$$

其中

$$dg_{jk} = \lambda_k\,\delta u_{jk} + \lambda_j\,\delta u_{kj}, \quad j<k,$$
$$dg_{jj} = 2i\lambda_j\,\delta u_{jj}.$$

由 δu_{jk} 所张成的体积元素，可定义为 $\{\mathfrak{U}_n\}$ 的体积元素 $\{\dot{\mathfrak{U}}_n\}$，即当 $\delta u_{jk} = \delta u'_{jk} + i\delta u''_{jk}$ 时

$$\{\dot{\mathfrak{U}}_n\} = \prod_{j=1}^{n}\delta u_{jj}\prod_{j<k}\delta u'_{jk}\,\delta u''_{jk};$$

故得

$$\dot{Z} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{j<k}|\lambda_j^2 - \lambda_k^2|\lambda_1\cdots\lambda_n\,d\lambda_1\cdots d\lambda_n\{\dot{\mathfrak{U}}_n\}. \tag{3.5.2}$$

今再討論实对称方陣的极坐标．任何实对称方陣 T 可以表成为

$$T = \Gamma\Lambda\Gamma', \tag{3.5.3}$$

此处 Γ 是行列式为 $+1$ 的实正交方陣，而

$$\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n], \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n.$$

且易見,一般説来,实对称方陣一一对应于 $\{O^+\}\times\Lambda$, 此处 $\{O^+\}$ 表示行列为 $+1$ 的正交羣对其分羣 $[\pm 1,\cdots,\pm 1]$ 的左傍系的集合.

微分 (3.5.3), 則得

$$\Gamma' dT\,\Gamma = \delta\Gamma\Lambda + d\Lambda - \Lambda\delta\Gamma,$$

此处 $\delta\Gamma = \Gamma^{-1}d\Gamma$ 是一斜对称方陣;因此

$$\sigma(dT\,dT') = \sigma((\delta\Gamma\Lambda - \Lambda\delta\Gamma)(\delta\Gamma\Lambda - \Lambda\delta\Gamma)') + \sigma(d\Lambda\,d\Lambda'),$$

命 $[\dot{O}^+] = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \delta\gamma_{ij}$, 則用同法可以算出

$$\dot{T} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|\, d\lambda_1\cdots d\lambda_n[\dot{O}^+]. \tag{3.5.4}$$

再命 S 代表一对称酉方陣,所有的 S 的集合以 Υ 表之. 命 U 是一酉方陣,今往求出 Υ 上的經变換

$$S_1 = USU' \tag{3.5.5}$$

而不变的积分元素.

命

$$S = (I + iT)(I - iT)^{-1}, \tag{3.5.6}$$

方陣 T 称为 S 的襄变数; 由于 S 是酉方陣,所以

$$(I + iT)(I - i\overline{T}') = (I - iT)(I + i\overline{T}'),$$

即 T 是爱尔米方陣. 又由于 S 是对称的,即

$$(I + iT)(I - iT)^{-1} = (I - iT')^{-1}(I + iT'),$$

而得 T 也是对称的. 因之, $T = T' = \overline{T}'$, 即 T 是一个实对称方陣. (3.5.6) 的逆变換是

$$-iT = (I - S)(I + S)^{-1}. \tag{3.5.7}$$

一般言之, (3.5.6) 及 (3.5.7) 建立了 T 与 S 間的一一对应关系. 例外流形的維数低于 $\frac{1}{2}n(n+1)$.

当 S 由 (3.5.6) 变为 S_1 时, T 亦将变为 T_1. 今往算出 T 与 T_1 間的关系. 把酉方陣 U 分写成虚实部分

$$U = A + Bi, \tag{3.5.8}$$

由 $U\overline{U}' = I$ 可知, A 与 B 是两个适合于

$$AA' + BB' = I, \quad AB' = BA' \tag{3.5.9}$$

的实方陣. 因为

$$\begin{aligned} S_1 = USU' &= (A + Bi)(I + iT)(I - iT)^{-1}\overline{U}^{-1} \\ &= [(A - BT) + (B + AT)i](I - iT)^{-1}(A - iB)^{-1} \\ &= [I + i(B + AT)(A - BT)^{-1}][I - i(B + AT)(A - BT)^{-1}]^{-1}, \end{aligned}$$

得出

$$T_1 = (AT + B)(-BT + A)^{-1}. \tag{3.5.10}$$

由 (3.5.9) 显然得出

$$(AT+B)(-BT+A)^{-1}=(-TB'+A')^{-1}(TA'+B'). \tag{3.5.11}$$

微分 (3.5.10) 并用 (3.5.11) 可得

$$\begin{aligned} dT_1 &= A\,dT(-BT+A)^{-1}+(AT+B)(-BT+A)^{-1}B\,dT(-BT+A)^{-1} \\ &= A\,dT(-BT+A)^{-1}+(-TB'+A')^{-1}(TA'+B')B\,dT(-BT+A)^{-1} \\ &= (-TB'+A')^{-1}[(-TB'+A')A+(TA'+B')B]dT(-BT+A)^{-1} \\ &= (-BT+A)'^{-1}dT(-BT+A)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

又由 (3.5.9) 及 (3.5.11) 可得

$$\begin{aligned} I+T_1^2 &= I+(-TB'+A')^{-1}(TA'+B')(AT+B)(-BT+A)^{-1} \\ &= (-BT+A)'^{-1}[(-TB'+A')(-BT+A)+(TA'+B')(AT+B)](-BT+A)^{-1} \\ &= (-BT+A)'^{-1}(I+T^2)(-BT+A)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

由 (3.5.12) 可知

$$\dot{T}_1=(\det(-BT+A))^{-(n+1)}\dot{T},$$

又由 (3.5.13) 得

$$\det(I+T_1^2)=\det(I+T^2)(\det(-BT+A))^{-2},$$

故得

$$(\det(I+T_1^2))^{-\frac{n+1}{2}}\dot{T}_1=(\det(I+T^2))^{-\frac{n+1}{2}}\dot{T}. \tag{3.5.14}$$

用与前面相同的方法 (§3.1) 可以算出

$$\dot{S}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}(\det(I+T^2))^{-\frac{n+1}{2}}\dot{T}, \tag{3.5.15}$$

此处 $\dot{T}=2^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{j<k}dt_{jk}$. 显然有 $\dot{S}=\dot{S}_1$, 这是一不变积分元素，Y 的总体积由定理 2.1.1 知等于

$$\int_S \dot{S}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}\int_T \det(I+T^2)^{-\frac{n+1}{2}}\dot{T}$$

$$=2^n\cdot 2^{\frac{3n(n-1)}{4}}\pi^{\frac{1}{4}n(n+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1-\nu)}.$$

如果用 (3.5.4), 則得

$$\dot{S}=2^n\cdot 2^{\frac{3n(n-1)}{4}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i^2)^{-\frac{n+1}{2}}d\lambda_1\cdots d\lambda_n\{\dot{O}^+\}. \tag{3.5.16}$$

命

$$e^{i\theta_\nu}=\frac{1+i\lambda_\nu}{1-i\lambda_\nu},$$

由于 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$, 故可命 $\pi\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi$, 易得

$$e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}=\frac{2i(\lambda_\nu-\lambda_\mu)}{(1-i\lambda_\nu)(1-i\lambda_\mu)},$$

即

$$|e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}|=\frac{2|\lambda_\nu-\lambda_\mu|}{(1+\lambda_\nu^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda_\mu^2)^{\frac{1}{2}}},$$

即得

$$\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}|e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}|=\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{\nu<\mu}|\lambda_\nu-\lambda_\mu|}{\prod_{\nu=1}^{n}(1+\lambda_\nu^2)^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{3.5.17}$$

另一方面

$$d\theta_\nu=\left(\frac{1}{1+i\lambda_\nu}+\frac{1}{1-i\lambda_\nu}\right)d\lambda_\nu=\frac{2}{1+\lambda_\nu^2}\,d\lambda_\nu. \tag{3.5.18}$$

由 (3.5.16), (3.5.17) 及 (3.5.18) 可得

$$\dot{S}=2^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}|e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}|\,d\theta_1\cdots d\theta_n\{\dot{O}^+\}. \tag{3.5.19}$$

附記. 本节中建議以下的結果: 任一对称酉方陣 S 可以表成为

$$S=\Gamma\Lambda\Gamma',$$

此处 Γ 是一实正交方陣, 其行列式等于 1 及 $\Lambda=[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]$.

§ 3.6. 斜对称方陣的极坐标

作者(华罗庚 [1]) 曾証明任一复元素的斜对称方陣 Z 可以表成为

$$UMU', \tag{3.6.1}$$

此处 U 是酉方陣而

$$M=\begin{pmatrix}0 & \lambda_1\\ -\lambda_1 & 0\end{pmatrix}\dotplus\begin{pmatrix}0 & \lambda_2\\ -\lambda_2 & 0\end{pmatrix}\dotplus\cdots,\qquad \lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_\nu\geqslant 0.$$

如果 n 是偶数, 这直和止于 $\begin{pmatrix}0 & \lambda_\nu\\ -\lambda_\nu & 0\end{pmatrix}$, 此处 $\nu=\left[\frac{1}{2}n\right]$. 不然在此項之后再加上"$\dotplus 0$".

今将討論形如

$$K=\Gamma F\Gamma' \tag{3.6.2}$$

的斜对称方陣, 此处 Γ 是实正交方陣之行列式等于 1 者, 而

$$F=\begin{pmatrix}0 & e^{i\theta_1}\\ -e^{i\theta_1} & 0\end{pmatrix}\dotplus\begin{pmatrix}0 & e^{i\theta_2}\\ -e^{i\theta_2} & 0\end{pmatrix}\dotplus\cdots,\qquad \pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_\nu\geqslant 0.$$

当 n 是偶数时, 任一斜对称酉方陣可以表成为 (3.6.2) 的形式, 但 Γ 的行列式可能是 ±1. 可注意者: 当 (3.6.2) 中的实裹变数当作复变数时, (3.6.2) 可以代表斜对称方陣所成的 $n(n-1)$ 維(实)流形.

方陣 (3.6.2) 的集合用 $\mathfrak{K}$ 表之. 如果有两組 (Γ, F) 及 (Γ_1, F_1) 代表同一方陣, 即

$$\Gamma F \Gamma' = \Gamma_1 F_1 \Gamma_1',$$

则得 $F = F_1$，且当 $\pi > \theta_1 > \theta_2 > \cdots > \theta_\nu > 0$ 时

$$\Gamma = \Gamma_1 \triangle,$$

此处

$$\triangle = \begin{pmatrix} \cos\delta_1 & \sin\delta_1 \\ -\sin\delta_1 & \cos\delta_1 \end{pmatrix} \dot{+} \begin{pmatrix} \cos\delta_2 & \sin\delta_2 \\ -\sin\delta_2 & \cos\delta_2 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots, \tag{3.6.3}$$

最后的尾巴是

$$\begin{pmatrix} \cos\delta_\nu & \sin\delta_\nu \\ -\sin\delta_\nu & \cos\delta_\nu \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} \cos\delta_\nu & \sin\delta_\nu \\ -\sin\delta_\nu & \cos\delta_\nu \end{pmatrix} \dot{+} 1,$$

各視 n 是偶数或奇数而定.

我們也用 Γ 代表正交方陣行列式为 1 者所成的羣，$\triangle$ 也表 (3.6.3) 所成的羣，$\Sigma = \dfrac{\Gamma}{\triangle}$ 代表 Γ 对其子羣 $\triangle$ 的左傍系的集合，如此可知：一般言之，$\mathfrak{R}$ 上的点与 Σ 中的一傍系及一个 F 一一对应.

微分 (3.6.2) 可得

$$dK = d\Gamma F \Gamma' + \Gamma dF \Gamma' + \Gamma F d\Gamma'.$$

再命 $\delta\Gamma = \Gamma' d\Gamma$，如此得出

$$\Gamma' dK \Gamma = \delta\Gamma F + dF - F\delta\Gamma$$

及

$$\Gamma' d\bar{K}' \Gamma = -\bar{F}'\delta\Gamma + \delta\Gamma \bar{F}' + d\bar{F}',$$

可知

$$\begin{aligned} \sigma(dK \cdot d\bar{K}') &= \sigma(\Gamma' dK \Gamma \cdot \Gamma' d\bar{K}' \Gamma) \\ &= \sigma((\delta\Gamma F + F\delta\Gamma)(\delta\Gamma \bar{F}' - \bar{F}'\delta\Gamma)) - \sigma((\delta\Gamma F - F\delta\Gamma) d\bar{F}') \\ &\quad + \sigma(dF(-\bar{F}'\delta\Gamma + \delta\Gamma \bar{F}')) + \sigma(dF\, d\bar{F}'). \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

由于

$$dF = iF[d\theta_1, d\theta_1, d\theta_2, d\theta_2, \cdots],$$

可知

$$\sigma(dF \cdot d\bar{F}') = 2(d\theta_1^2 + \cdots + d\theta_\nu^2). \tag{3.6.5}$$

又由于 $dF\bar{F}' = \bar{F}' dF$，可知

$$\sigma((\delta\Gamma F - F\delta\Gamma) d\bar{F}') = \sigma(\delta\Gamma F d\bar{F}') - \sigma(\delta\Gamma d\bar{F}' F) = 0 \tag{3.6.6}$$

及

$$\sigma(dF(-\bar{F}'\delta\Gamma + \delta\Gamma \bar{F}')) = 0. \tag{3.6.7}$$

更有

$$\sigma((\delta\Gamma F - F\delta\Gamma)(\delta\Gamma \bar{F}' - \bar{F}'\delta\Gamma)) = 2\sigma(\delta\Gamma F \delta\Gamma \bar{F}') - 2\sigma(\delta\Gamma^2 \bar{F}' F). \tag{3.6.8}$$

总括 (3.6.4), (3.6.8) 可得

$$\sigma(dK \cdot d\bar{K}') = 2\sigma(\delta\Gamma F \delta\Gamma \bar{F}') - 2\sigma(\delta\Gamma^2 \bar{F}' F) + 2\sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2. \tag{3.6.9}$$

形式上虽然有 $\frac{1}{2}n(n-1) + \nu$ 个变数 $\delta\gamma_{\alpha\beta}(1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n)$ 及 $d\theta_\alpha(1 \leqslant \alpha \leqslant \nu)$ 的

二次型，实质上，它并不含有 $\delta\gamma_{12}, \delta\gamma_{34}, \cdots$；换言之，它是一个 $\frac{1}{2}n(n-1)-\nu+\nu=$ $=\frac{1}{2}n(n-1)$ 个变数的二次型．以下我們将具体地算出这微分二次型及其行列式（即体积元素）．

定理 3.6.1. 流形 $\mathfrak{K}$（由 (3.6.2) 所定义的）的容积元素是

$$\dot{K}=a\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha)\prod_{\alpha=1}^{\nu}d\theta_\alpha\,\Sigma, \tag{3.6.10}$$

此处

$$a=\begin{cases}2^{2\nu(\nu-1)+\frac{1}{2}\nu}, & \text{当 } n=2\nu,\\ 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{3}{2}\nu}, & \text{当 } n=2\nu+1.\end{cases}$$

Σ 乃傍系集合 Σ 上的容积元素，更具体些 Σ 是 $\delta\gamma_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant\nu)$ 的乘积，但其中除掉 $\delta\gamma_{12}, \delta\gamma_{34}, \cdots$ 諸項（項数是 ν）．

証：先假定 $n=2\nu$ 是偶数．把 $\delta\Gamma$ 及 F 分裂为二行二列的小方陣

$$\delta\Gamma=(\delta\Gamma_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant\nu},\qquad(\delta\Gamma_{\alpha\beta})'=-\delta\Gamma_{\beta\alpha}$$

及

$$F=F_1\dotplus\cdots\dotplus F_\nu,$$

此处

$$F_\alpha=e^{i\theta_\alpha}F_0,\qquad\bar{F}'_\alpha=-e^{-i\theta_\alpha}F_0,\qquad F_0=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

代进 (3.6.9) 可得

$$\begin{aligned}\sigma(dK\,d\bar{K}')&=2\sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu}\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\beta}F_\beta\delta\Gamma_{\beta\alpha}\bar{F}'_\alpha)-2\sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu}\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\beta\alpha})+2\sum_{\alpha=1}^{\nu}d\theta_\alpha^2\\&=-2\sum_{\alpha=1}^{\nu}(\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\alpha}F_0\delta\Gamma_{\alpha\alpha}F_0)+\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\alpha}))\\&\quad+4\sum_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}(\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\beta}\delta\Gamma'_{\alpha\beta})+\cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\beta}F_0\delta\Gamma'_{\alpha\beta}F_0))\\&\quad+2\sum_{\alpha=1}^{\nu}d\theta_\alpha^2.\end{aligned}\tag{3.6.11}$$

首先

$$\delta\Gamma_{\alpha\alpha}=\begin{pmatrix}0&p\\-p&0\end{pmatrix},$$

由此得到

$$\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\alpha}F_0\delta\Gamma_{\alpha\alpha}F_0)+\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\alpha})=0. \tag{3.6.12}$$

又命

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},$$

則

$$\begin{aligned}&4\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\beta}\delta\Gamma'_{\alpha\beta})+4\cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)\,\sigma(\delta\Gamma_{\alpha\beta}F_0\delta\Gamma'_{\alpha\beta}F_0)\\&=4(a^2+b^2+c^2+d^2+2\cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)(bc-ad)),\end{aligned}\tag{3.6.13}$$

这是 a, b, c, d 四个变数的二次型，它的行列式等于

$$4^4\sin^4(\theta_\beta-\theta_\alpha).$$

由 (3.6.12) 及(3.6.13)可見 (3.6.11) 是一个 $4\frac{1}{2}\nu(\nu-1)+\nu=\frac{1}{2}n(n-1)$ 个变数的二次型，它的行列式等于

$$4^{2\nu(\nu-1)}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^4(\theta_\beta-\theta_\alpha)\cdot 2^\nu.$$

由此 $\mathfrak{R}$ 的体积元素等于

$$2^{2\nu(\nu-1)+\frac{1}{2}\nu}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha)\prod_{\alpha=1}^{\nu}d\theta_\alpha\,\Sigma. \tag{3.6.14}$$

再討論 $n=2\nu+1$ 是奇数的情况. 把 $\delta\Gamma$ 与 F 分裂为

$$\begin{pmatrix}\delta\Gamma_1^{(2\nu)} & \delta v\\ -\delta v' & 0\end{pmatrix},\qquad F=F^{(2\nu)}\dotplus 0.$$

代进 (3.6.9) 可得

$$\sigma(dK\,d\bar{K}')=2\sigma\left(\begin{pmatrix}\delta\Gamma_1F_1 & 0\\ -\delta v'F_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\Gamma_1\bar{F}_1' & 0\\ -\delta v'\bar{F}_1' & 0\end{pmatrix}\right)-$$

$$-2\sigma\left(\begin{pmatrix}\delta\Gamma_1\delta\Gamma_1-\delta v\,\delta v' & \delta\Gamma_1\delta v\\ -\delta v'\delta\Gamma_1 & -\delta v'\delta v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I^{(2\nu)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)+2\sum_{\alpha=1}^{\nu}d\theta_\alpha^2=$$

$$=2\sigma(\delta\Gamma_1F_1\delta\Gamma_1\bar{F}_1')-2\sigma(\delta\Gamma_1\delta\Gamma_1)+2\sigma(\delta v\,\delta v')+2\sum_{\alpha=1}^{\nu}d\theta_\alpha^2.$$

由本証明上半段的結果可知 $\mathfrak{R}$ 上的容积元素是

$$2^{2\nu(\nu-1)+\frac{1}{2}\nu}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha)\cdot 2^\nu\prod_{\alpha=1}^{\nu}d\theta_\alpha\,\Sigma. \tag{3.6.15}$$

現在我們再研究下列方陣所成的集合

$$K=UDU', \tag{3.6.16}$$

此处 U 是一酉方陣而

$$D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\dotplus\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\dotplus\cdots.$$

当 n 是偶数时，最末項是 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$；不然，則最末項是 0. 当 n 是偶数时，(3.6.16) 就是 (3.6.2)；但当 n 是奇数时，却不相同. 前已知 (3.6.2)的(实)維数是 $\frac{1}{2}n(n-1)$，今往証明：当 n 为奇数时，(3.6.16) 的維数等于 $\frac{1}{2}n(n+1)-1$. 由 $UDU'=D$ 可得

$$UD^2=D^2U,$$

故

$$U=\begin{pmatrix}U_1^{(n-1)} & 0\\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix},$$

而 U_1 是 $n-1$ 行列的酉方陣. 由

$$U_1\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)U_1'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

可知 U_1 是辛酉方陣．$n-1$ 行列辛酉羣的維数是 $\frac{1}{2}n(n-1)$，故对一个固定的 K，适合 (3.6.16) 的不同的 U 的集合的維数是 $\frac{1}{2}n(n-1)+1$．酉羣的維数是 n^2，故 (3.6.16) 所定义的集合的維数等于

$$n^2-\left(\frac{1}{2}n(n-1)+1\right)=\frac{1}{2}n(n+1)-1.$$

又此时 K 的集合的总体积(即 $\mathfrak{C}_{\text{III}}$ 的体积)，可由 n 为偶数的情形推出 (見 §4.8)．

§3.7. 实正交羣的体积及其一个应用

作为一个附录，我們現在敍述一下实正交羣的积分元素及其体积．附在这儿来敍述的原因是由于所用的方法是一样的．

現在先研究 n 行列的实正交羣 O_n，即适合以下关系的 n 行列的实方陣 T：

$$TT'=I. \tag{3.7.1}$$

显然有 $\det T=\pm 1$．行列式为 $+1$ 的正交方陣所成的羣用 O_n^+ 表示．对应于一个 T 可以做一个方陣

$$K=(I-T)(I+T)^{-1}, \tag{3.7.2}$$

但 $\det(I+T)=0$ 的情形必須除外．現在对 $\det(I+T)=0$ 的情形我們不能說"一般說来不成立"．因为任一行列式为 -1 的 T，一定使 $\det(I+T)=0$ (此点可由 $\det(I+T)=\det(TT'+T)=\det T\det(T'+I)=-\det(I+T)$ 知之)，所以現在限定 T 属于 O_n^+．由 (3.7.1) 立得

$$K=-K'; \tag{3.7.3}$$

解 (3.7.2) 立得

$$T=(I-K)(I+K)^{-1}; \tag{3.7.4}$$

由于 $\det(I-K)=\det(I-K')=\det(I+K)$，也可知 $\det T=+1$．

微分 (3.7.4) 可得

$$dT=-2(I+K)^{-1}dK(I+K)^{-1},$$

因此

$$\sigma(dT\,dT')=-4\sigma(dK(I-K^2)^{-1}dK(I-K^2)^{-1}). \tag{3.7.5}$$

把 dK 写成 (dk_{ij})，其中 $dk_{ij}=-dk_{ji}$；把 $(I-K^2)^{-1}$ 写成 (u_{st})，其中 $u_{st}=u_{ts}$，则 (3.7.5) 变成为

$$8\sum_{i<j}\sum_{s<t}(u_{js}u_{it}-u_{is}u_{jt})\,dk_{ij}\,dk_{st},$$

故得出积分元素

$$\dot{T}=2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\det(I-K^2)^{-\frac{1}{2}(n-1)}\dot{K}, \tag{3.7.6}$$

此处

$$\dot{K} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i<j} dk_{ij}.$$

所以正交羣 O_n^+ 的总体积是

$$\int \dot{T} = 2^{\frac{3}{2}n(n-1)} \int \cdots \int_K \det (I - K^2)^{-\frac{1}{2}(n-1)} \dot{K}.$$

由 (2.1.4) 可知

$$\int \dot{T} = 2^{\frac{3}{4}n(n-1)} \pi^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu-1)\right)}{\Gamma(\nu-1)}. \tag{3.7.7}$$

現在我們可以算出流形 $\mathfrak{R}$ 的总体积．先証

定理 3.7.1. 我們有等式

$$\int_{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_\nu>0} \cdots \int \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha)\, d\theta_1 \cdots d\theta_\nu = \frac{(2\pi)^\nu}{2^{\nu^2}} \tag{3.7.8}$$

及

$$\int_{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_\nu>0} \cdots \int \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} (\cos\theta_\beta - \cos\theta_\alpha)^2 d\theta_1 \cdots d\theta_\nu = \frac{(2\pi)^\nu}{2^{2\nu-1}((\nu-1)!)^2}. \tag{3.7.9}$$

証: 由于

$$\sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha) = \frac{1}{4} |e^{2i\theta_\alpha} - e^{2i\theta_\beta}|^2$$

及 $e^{in\theta}$ 的正交性質可知

$$\int_{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_\nu>0} \cdots \int \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha)\, d\theta \cdots d\theta_\nu =$$

$$= \frac{1}{\nu!\, 2^\nu \cdot 2^{\nu(\nu-1)}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} |e^{2i\theta_\alpha} - e^{2i\theta_\beta}|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_\nu = \frac{(2\pi)^\nu \nu!}{\nu!\, 2^{\nu^2}} = \frac{(2\pi)^\nu}{2^{\nu^2}}.$$

又由于 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1), \cos^m\theta = \frac{1}{m}\cos m\theta + \cdots$ 及 $\cos m\theta$ 的正交性質可知

$$\int_{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_\nu>0} \cdots \int \left(\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} (\cos\theta_\beta - \cos\theta_\alpha) \right)^2 d\theta_1 \cdots d\theta_\nu$$

$$= \frac{1}{2^\nu \cdot \nu!} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left(\det \begin{pmatrix} \cos^{\nu-1}\theta_1, & \cdots, & \cos^{\nu-1}\theta_\nu \\ \cos^{\nu-2}\theta_1, & \cdots, & \cos^{\nu-2}\theta_\nu \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & \cdots, & 1 \end{pmatrix} \right)^2 d\theta_1 \cdots d\theta_\nu$$

$$= \frac{1}{2^\nu \cdot \nu!((\nu-1)!)^2} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left(\det \begin{pmatrix} \cos(\nu-1)\theta_1, \cdots, \cos(\nu-1)\theta_\nu \\ \cos(\nu-2)\theta_1, \cdots, \cos(\nu-2)\theta_\nu \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1, \quad \cdots, \quad 1 \end{pmatrix} \right)^2 d\theta_1 \cdots d\theta_\nu$$

$$= \frac{(2\pi)^\nu \cdot \nu!}{2^\nu \cdot \nu!((\nu-1)!)^2} = \frac{\pi^\nu}{2^{\nu-1}((\nu-1)!)^2}.$$

今往研究形式如

$$G = \Gamma M \Gamma' \tag{3.7.10}$$

的正交方陣 G 的集合，式中 Γ 是行列式为 1 的正交方陣且

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \dotplus \cdots, \quad \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_\nu \geqslant 0. \tag{3.7.11}$$

当 $n = 2\nu$ 时，此直和終止于 $\begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix}$；而当 $n = 2\nu + 1$ 时，它終止于

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix} \dotplus 1. \tag{3.7.12}$$

同时我們也用 G 代表此集合，$V(G)$ 表示 G 的体积. 当 n 是奇数时，(3.7.10) 包括所有的行列式为 $+1$ 的正交方陣，所以由 (3.7.7)

$$V(G) = (8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{\alpha=2}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha-1)\right)}{\Gamma(\alpha-1)}; \tag{3.7.13}$$

当 n 是偶数时，任一行列式为 $+1$ 的正交方陣可以表成为 (3.7.10) 的形式，但 $\det\Gamma$ 可能是 ± 1，因之

$$V(G) = \frac{1}{2}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{\alpha=2}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha-1)\right)}{\Gamma(\alpha-1)}. \tag{3.7.14}$$

現在再用另一方法来計算 $V(G)$. 若

$$G = \Gamma M \Gamma' = \Gamma_1 M_1 \Gamma_1', \quad \pi > \theta_1 > \cdots > \theta_\nu > 0,$$

则得 $\Gamma = \Gamma_1 \Delta$，其中

$$\Delta = \begin{pmatrix} \cos\delta_1 & \sin\delta_1 \\ -\sin\delta_1 & \cos\delta_1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} \cos\delta_2 & \sin\delta_2 \\ -\sin\delta_2 & \cos\delta_2 \end{pmatrix} \dotplus \cdots.$$

因而一般言之，G 上的任一点可以用 $\Sigma\,(=\Gamma/\Delta)$ 的一个傍系及一个 M 来表示；并且表法是唯一的(可能有較低維的流形必須除外).

利用已往屡用的方法可以証得，G 的体积元素等于

$$\dot{G} = b \prod_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \nu} (\cos\theta_\alpha - \cos\theta_\beta)^2 \prod_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2\, \dot{\Sigma},$$

此处

$$b = \begin{cases} 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{3}{2}\nu}, & \text{若 } n = 2\nu \\ 2^{2\nu^2+\frac{1}{2}\nu}, & \text{若 } n = 2\nu+1. \end{cases}$$

如果命

$$V(\Sigma) = \int \cdots \int_{\Sigma} \dot{\Sigma},$$

則得

$$V(G) = bV(\Sigma) \int \cdots \int_{\pi > \theta_1 > \cdots > \theta_\nu \geq 0} \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq \nu} (\cos\theta_\alpha - \cos\theta_\beta)^2 d\theta_1 \cdots d\theta_\nu$$

$$= bV(\Sigma) \frac{(2\pi)^\nu}{2^{2\nu-1}((\nu-1)!)^2}. \tag{3.7.15}$$

再由定理 3.6.1 可知

$$\frac{1}{c} = aV(\Sigma) \int \cdots \int_{\pi > \theta_1 > \cdots > \theta_\nu \geq 0} \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq \nu} \sin^2(\theta_\alpha - \theta_\beta) d\theta_1 \cdots d\theta_\nu,$$

又由 (3.7.8) 可知

$$\frac{1}{c} = aV(\Sigma) \frac{(2\pi)^\nu}{2^{\nu^2}}. \tag{3.7.16}$$

合併 (3.7.15) 及 (3.7.16) 可見

$$\frac{1}{c} = \frac{a}{b} \frac{((\nu-1)!)^2}{2^{(\nu-1)^2}} V(G).$$

命

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{a}{b}, & \text{若 } n \text{ 是奇数} \\ \dfrac{a}{2b}, & \text{若 } n \text{ 是偶数,} \end{cases}$$

則得

$$\frac{1}{c} = \lambda \frac{((\nu-1)!)^2}{2^{(\nu-1)^2}} (8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)},$$

此处

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{若 } n \text{ 是偶数,} \\ 2^{-\nu}, & \text{若 } n \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

当 n 是偶数时, $\mathfrak{K}$ 与 $\mathfrak{R}_{\rm III}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_{\rm III}$ 相同,因此 n 是偶数时 $\mathfrak{C}_{\rm III}$ 的总体积也已經算出.

第 四 章

若干一般性的定理及其應用

§ 4.1. 圓型域的完整系

命 $\mathfrak{R}$ 表 n 个复变数 $z=(z_1, \cdots, z_n)$ 的包有原点的有界单連通域；命 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的边界上的特征流形，其上的任一点在其邻域內（指在 $\mathfrak{C}$ 上的邻域）

$$z_i=\xi_i=\xi_i(t_1, \cdots, t_m) \qquad (m \geqslant n),$$

可以实参变数 $t_1, \cdots, t_m$ 的解析函数表出之，并假定函数方陣 $\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$ 的秩等于 n. 由此性質可以得知，当 $t_1, \cdots, t_m$ 作为复变数时，則 $z_i=\xi_i$ 变成为 n 个非互依的变数.

熟知 (Bergmann [1]) 在 $\mathfrak{R}$ 中解析且适合于

$$\int_{\mathfrak{R}} |f(z)|^2 \dot{z}<\infty \tag{4.1.1}$$

(其中 $z_k=x_k+i y_k(k=1,2, \cdots, n)$, x_k 与 y_k 是实数, $\dot{z}=\prod_{k=1}^{n} dx^k\, dy^k$) 的所有函数 $f(z)$ 所成的 $B^2(=B^2(\mathfrak{R}))$ 空間中有一函数貫

$$\varphi_\nu(z), \quad \nu=0,1,2, \cdots$$

存在，它有以下的性質：

(i)
$$\int_{\mathfrak{R}} \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\mu(z)}\, \dot{z}=\delta_{\nu\mu}, \tag{4.1.2}$$

(ii) 若 $f(z)$ 属于 B^2, 且

$$\int_{\mathfrak{R}} f(z) \overline{\varphi_\nu(z)}\, \dot{z}=0, \qquad \nu=0,1,2, \cdots$$

則 $f(z) \equiv 0$, 即 $\{\varphi_\nu(z)\}$ 成为一个正交正常完整系.

假定 $\mathfrak{R}$ 是圓型域，即經变形

$$z=e^{i\theta} w \tag{4.1.3}$$

而不变的域，則有下面的性質：

假定 $a_1, \cdots, a_n$; $b_1, \cdots, b_n$ 是 $2n$ 个非負整数，且

$$a_1+\cdots+a_n \neq b_1+\cdots+b_n.$$

命

$$A=\int_{\mathfrak{R}} z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n} \bar{z}_1^{b_1} \cdots \bar{z}_n^{b_n}\, \dot{z}, \tag{4.1.4}$$

由于 $\dot{z}=\dot{w}$ 可知

$$A=e^{i(a_1+\cdots+a_n-b_1-\cdots-b_n)\theta}\int_{\mathfrak{R}} w_1^{a_1}\cdots w_n^{a_n}\,\overline{w}_1^{b_1}\cdots\overline{w}_n^{b_n}\,\dot{w}$$
$$=e^{i(a_1+\cdots+a_n-b_1-\cdots-b_n)\theta}A,$$

因此得出

$$A=0. \tag{4.1.5}$$

如果假定流形 $\mathfrak{C}$ 也是圓型的，即經变形

$$\eta=e^{i\theta}\xi$$

而不变，則同法可以証明：

$$\int_{\mathfrak{C}}\xi_1^{a_1}\cdots\xi_n^{a_n}\,\overline{\xi}_1^{b_1}\cdots\overline{\xi}_n^{b_n}\,\dot{\xi}=0. \tag{4.1.6}$$

必須説明式中的 $\dot{\xi}$ 的意义，它是由二次微分型

$$\sum_{i=1}^{n}|dz_i|^2=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\xi_i}{\partial t_j}dt_j\right|^2$$

所得的体积元素，即

$$\dot{\xi}=\sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\overline{\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)'}\right)}\,dt_1\cdots dt_m. \tag{4.1.7}$$

定理 4.1.1. 假定 $\mathfrak{R}$ 是圓型有界星状域．若 $f(z)$ 在 $\mathfrak{R}$ 中是有則的，并且

$$\int_{\mathfrak{R}}f(z)\,\overline{z}_1^{a_1}\cdots\overline{z}_n^{a_n}\,\dot{z}=0,$$

此处 $a_1,\cdots,a_n$ 各过 $0,1,2,\cdots$ 等，則 $f(z)$ 必恆等于零.

証：以 $\mathfrak{R}(t)$ 表示以原点为中心，把 $\mathfrak{R}$ 縮小 t 倍所得的域 $(0<t\leqslant 1)$ $\mathfrak{R}(1)=\mathfrak{R}$. 当 $t\to 0$ 时，$\mathfrak{R}(t)$ 縮为原点，即与任一非原点的点，必有一 t 使該点在 $\mathfrak{R}(t)$ 之外，必有一 t 使冪級数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{a_1+\cdots+a_n=k}c_{a_1,\cdots,a_n}z_1^{a_1}\cdots z_n^{a_n} \tag{4.1.8}$$

在 $\mathfrak{R}(t)$ 中一致收斂．命

$$g_m(z)=\sum_{b_1+\cdots+b_n=m}c_{b_1,\cdots,b_n}z_1^{b_1}\cdots z_n^{b_n},$$

由 (4.1.4), (4.1.5) 可知

$$\int_{\mathfrak{R}(t)}f(z)\,\overline{g_m(z)}\,\dot{z}=t^{2m}\int_{\mathfrak{R}}|g_m(t)|^2\,\dot{z}=0$$

(由于 $\mathfrak{R}(t)$ 仍是圓型域)，故得 $g_m(z)\equiv 0$. 当 m 过 $0,1,2,\cdots$ 时，可知 $f(z)\equiv 0$.

§ 4.2. 核函数

假定有界域 $\mathfrak{R}$ 包有原点为其内点．命 Γ 表变 $\mathfrak{R}$ 为其自己的羣，其中的元素是解析变

换,使原点不变的諸变换所成的分羣以 Γ_0 表示. 习知 (H. Cartan [1]), Γ_0 中任一元素由它的綫性項唯一地决定,即

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} z_j + \text{高次項}. \tag{4.2.1}$$

当 u_{ij} 已定之后,此变形唯一地决定. 已知羣 Γ_0 是紧緻的, 因此不妨假定(經过必須的綫性变换) (u_{ij}) 是酉方陣,以 U 表示. 有时,我們就用 U 来表变形 (4.2.1), 假如 $U \in \Gamma_0$ 是指变形 (4.2.1) 而言.

研究傍系 Γ/Γ_0. 同一傍系中的变形都变同一点 a 为 0, 这些 a 成 $\mathfrak{R}$ 内的点集, 以 $\mathfrak{M}$ 表示. $\mathfrak{M}$ 可以称为 $\mathfrak{R}$ 内羣 Γ 的与原点相当的可递集合, 所以 Γ 中的元素是由 $\mathfrak{M}$ 中的一点及 Γ_0 中的一个酉方陣唯一决定的. 把它写为

$$w = f(z; a, U), \qquad a \in \mathfrak{M}, \qquad U \in \Gamma_0. \tag{4.2.2}$$

命

$$z = f(x; b, V), \qquad b \in \mathfrak{M}, \qquad V \in \Gamma_0 \tag{4.2.3}$$

是另一变换,而

$$w = f(f(x, b, V); a, U) = f(x; c, W) \tag{4.2.4}$$

是 (4.2.2) 与 (4.2.3) 的乘积;又命 $w = 0$, 立刻得出

$$a = f(c; b, V). \tag{4.2.5}$$

微分 (4.2.4) 可得

$$\frac{\partial f_i(x; c, W)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(z; a, U)}{\partial z_k} \frac{\partial f_k(x; b, V)}{\partial x_j}. \tag{4.2.6}$$

变形 (4.2.2) 的函数方陣以

$$J(z, a, U) = (a_{ij}), \qquad a_{ij} = \frac{\partial f_i(z; a, U)}{\partial z_j}$$

表之. 在 (4.2.6) 中取 $x = c$, 則 $z = a$, 因而得出

$$J(c, c, W) = J(a, a, U)\, J(c, b, V),$$

卽当由 (4.2.5) 把 c 点变为 a 点时, $J(c, c, W)$ 变为 $J(a, a, U)$ 和变形 (4.2.5) 的函数方陣的乘积. 换符号卽得

$$J(x, x, W) = J(z, z, U)\, J(x, b, V), \tag{4.2.7}$$

此式当 x 与 z 都在 $\mathfrak{M}$ 上时成立,而 x 与 z 之間有关系

$$z = f(x; b, V). \tag{4.2.8}$$

若另有一变形

$$u = f(x; b, V_0),$$

則由 u 到 z 的变形是使原点不变的;因之,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{z=0} = U_0$$

是一酉方陣. 由此卽得

$$[J(x;\,b,\,V)]_{x=b}=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{z=0}[J(x;\,b,\,V_0)]_{x=b},$$

所以

$$J(b;\,b,\,V)=U_0J(b;\,b,\,V_0),\tag{4.2.9}$$

此处 U_0 是 Γ_0 中的一个酉方陣;因此得出

$$\overline{J(z;\,z,\,V)}'J(z;\,z,\,V)=\overline{J(z;\,z,\,V_0)}'J(z;\,z,\,V_0).\tag{4.2.10}$$

此說明 $\bar{J}'J$ 只与 Γ/Γ_0 中把 z 变为 0 的傍系有关,而与傍系中的元素无关,因此可命

$$|\det J(z;\,z,\,V)|^2=Q(z,\,\bar{z}).$$

由 (4.2.7) 可知

$$Q(x,\,\bar{x})=Q(z,\,\bar{z})|\det J(x;\,b,\,V)|^2,\tag{4.2.11}$$

此式当 z 与 x 都在 $\mathfrak{M}$ 上,且 x 与 z 之間有关系 (4.2.8) 时成立.

S. Bergmann [1] 証明了域 $\mathfrak{R}$ 的核函数 $K(z,\,\bar{z})$ 經过变换 (4.2.8) 时也常有

$$K(x,\,\bar{x})=K(z,\,\bar{z})\,|\det J(x;\,b,\,V)|^2,\tag{4.2.12}$$

因此得出:若 x 与 z 同在 $\mathfrak{M}$ 上,则

$$\frac{K(x,\,\bar{x})}{Q(x,\,\bar{x})}=\frac{K(z,\,\bar{z})}{Q(z,\,\bar{z})}.\tag{4.2.13}$$

定理 4.2.1. 如果 $\mathfrak{R}$ 是圓型有界星状域,则当 z 在 $\mathfrak{M}$ 上时

$$K(z,\,\bar{z})=\frac{1}{\Omega}Q(z,\,\bar{z}),$$

此处 Ω 是 $\mathfrak{R}$ 域的体积.

証: 由 § 4.1 可知, $\mathfrak{R}$ 中正常正交函数系可由次法得之:把

$$z_1^{a_1}\cdots z_n^{a_n},\qquad a_1+\cdots+a_n=m$$

的諸項正交正常化, 再命 $m=1,2,\cdots$, 卽得 $\mathfrak{R}$ 域中完整的正交正常系: 卽有一个函数是常数, 它就是 $\frac{1}{\sqrt{\Omega}}$, 并有 $\frac{1}{m!}n(n+1)\cdots(n+m-1)$ 个 m 次齐次式. 概括言之,有一完整正常正交系 $\{\varphi_\nu(z)\}$, $\nu=0,1,2,\cdots$, 其中

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{\sqrt{\Omega}},\qquad \varphi_\nu(0)=0,\quad \text{当}\quad \nu\geqslant 1.$$

故由

$$K(z,\,\bar{z})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(z)},$$

立得

$$K(0,\,0)=\frac{1}{\Omega}.$$

另一方面，由 $Q(z,\bar{z})$ 的定义可知 $Q(0,0)=1$. 由此得本定理.

再假定 $\mathfrak{R}$ 是可递域，今往說明 $Q(z,\bar{z})$ 的几何意义：由 (4.2.7) 可知

$$J(x;x,W)\,dx'=J(z;z,U)\,dz',$$

因之得出

$$\overline{dx}\,\overline{J(x;x,W)}'\,J(x;x,W)\,dx'=\overline{dz}\,\overline{J(z;z,U)}'\,J(z;z,U)\,dz'.$$

此不变型可以看成为本空間的度量. 根据这度量，体积元素等于

$$|\det J(z;z,U)|^2\,\dot{z}=Q(z,\bar{z})\,\dot{z}.$$

因此，$Q(z,\bar{z})$ 可以称为体积密率.

由定理 4.2.1 可知：

任一有界圓型可递域的核函数等于体积密率与欧几里得体积之比.

以下几节就根据这一原理而不經过正常正交完整系的求得直接地算出四种典型域的核函数.

§ 4.3. 典型域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 的核函数

1°. 域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 的羣 Γ 是由以下的变形：

$$Z_1=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \tag{4.3.1}$$

$$A=A^{(m)},\qquad B=B^{(m,n)},\qquad C=C^{(n,m)},\qquad D=D^{(n)},$$

$$\bar{A}A'-\bar{B}B'=I^{(m)},\qquad \bar{A}C'=\bar{B}D',\qquad \bar{C}C'-\bar{D}D'=-I^{(n)}$$

所組成的(华罗庚 [1]). 当 $m=n$ 时，我們还得假定

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=+1. \tag{4.3.2}$$

今往求出把任一点 P 变为原点的变形. 由定义可知

$$I-\bar{P}P'>0;$$

由定理 2.1.2 也知

$$I-P'\bar{P}>0.$$

习知有一 m 行列的方陣 Q 及一 n 行列的方陣 R 使

$$\bar{Q}(I^{(m)}-\bar{P}P')Q'=I,\qquad \bar{R}(I^{(n)}-P'\bar{P})R'=I. \tag{4.3.3}$$

变形

$$Z_1=Q(Z-P)(I-\bar{P}'Z)^{-1}R^{-1} \tag{4.3.4}$$

变 P 为 0. 也可証明这变形属于 (4.3.1).

微分 (4.3.4) 可知

$$dZ_1=Q[dZ(I-\bar{P}'Z)^{-1}+(Z-P)\,d((I-\bar{P}'Z)^{-1})]R^{-1};$$

命 $Z=P$，得

$$dZ_1=Q\,dZ(I-\bar{P}'P)^{-1}R^{-1}=Q\,dZ\,\bar{R}'.$$

这就是在 P 点

$$\dot{Z}_1=|(\det Q)^m(\det\bar{R}')^n|^2\,\dot{Z}=\det(I-P\bar{P}')^{-m-n}\,\dot{Z},$$

卽得

$$Q(Z, \bar{Z}) = \det(I - Z\bar{Z}')^{-m-n}.$$

由上节的結果可知

定理 4.3.1. 域 $\mathfrak{R}_I$ 的核函数是

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_I)}(\det(I - Z\bar{Z}'))^{-m-n}, \tag{4.3.5}$$

此处由 (2.2.2) 知

$$V(\mathfrak{R}_I) = \frac{(m-1)!\cdots 2!\,1!\,(n-1)!\cdots 2!\,1!}{(m+n-1)!\cdots 2!\,1!}\pi^{mn}.$$

2°. 域 $\mathfrak{R}_{II}$ 的羣 Γ 是变形

$$Z_1 = (AZ + B)(\bar{B}Z + \bar{A})^{-1} \tag{4.3.6}$$

所組成的，此处

$$A'\bar{B} = \bar{B}'A, \qquad \bar{A}'A - B'\bar{B} = I.$$

命 P 表 $\mathfrak{R}_{II}$ 中的一点，有一方陣 R 使

$$\bar{R}(I - \bar{P}P')R' = I. \tag{4.3.7}$$

变形

$$Z_1 = R(Z - P)(I - \bar{P}Z)^{-1}\bar{R}^{-1} \tag{4.3.8}$$

属于 Γ，并且它把 P 变为 0.

微分 (4.3.8)

$$dZ_1 = R(dZ\,(I - \bar{P}Z)^{-1} + (Z - P)\,d(I - \bar{P}Z)^{-1})\,\bar{R}^{-1}.$$

命 $Z = P$ 得

$$dZ_1 = R\,dZ(I - \bar{P}P)^{-1}\bar{R}^{-1} = R\,dZ\,R'.$$

因此得出在 P 点有

$$\dot{Z}_1 = |(\det R)^{n+1}|^2\dot{Z} = \frac{1}{\det(I - P\bar{P})^{n+1}}\dot{Z}.$$

因此得出

$$Q(Z, \bar{Z}) = \det(I - Z\bar{Z})^{-n-1}.$$

定理 4.3.2. 域 $\mathfrak{R}_{II}$ 的核函数是

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{II})}\det(I - Z\bar{Z})^{-n-1}, \tag{4.3.9}$$

此处由 (2.3.2) 知

$$V(\mathfrak{R}_{II}) = \pi^{\frac{1}{2}n(n+1)}\frac{(2n-2)!\cdots 4!\,2!}{(2n-1)!\,(2n-2)!\cdots n!}.$$

3°. 域 $\mathfrak{R}_{III}$ 的羣 Γ 是由变形：

$$Z_1 = (AZ + B)(-\bar{B}Z + \bar{A})^{-1} \tag{4.3.10}$$

所組成的，此处

$$A'\bar{B} = -\bar{B}'A, \qquad A'\bar{A} - \bar{B}'B = I.$$

命 P 是 $\mathfrak{R}_{III}$ 中的一点，即

$$I + P\bar{P} > 0.$$

若有一Q使

$$\bar{Q}(I+P\bar{P})Q'=I,$$

则Γ中有一变形

$$Z_1=Q(Z-P)(I+\bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1} \tag{4.3.11}$$

变P为0.

微分(4.3.11)得

$$dZ_1=Q(dZ(I+\bar{P}Z)^{-1}+(Z-P)d(I+\bar{P}Z)^{-1})\bar{Q}^{-1}.$$

命$Z=P$得

$$dZ_1=Q\,dZ(I+\bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1}=Q\,dZ\,Q'.$$

因此得出在P点

$$\dot{Z}_1=|(\det Q)^{n-1}|^2\dot{Z}=\det(I+P\bar{P})^{-n+1}\dot{Z},$$

因此

$$Q(Z,\bar{Z})=(\det(I+Z\bar{Z}))^{-n+1}.$$

定理 4.3.3. 域$\mathfrak{R}_{\rm III}$的核函数是

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\rm III})}\det(I+Z\bar{Z})^{-n+1},$$

此处由(2.4.2)知

$$V(\mathfrak{R}_{\rm III})=\frac{(2n-4)!\cdots4!\,2!}{(2n-3)!\cdots n!\,(n-1)!}\pi^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

§4.4. 域$\mathfrak{R}_{\rm IV}$的核函数

域$\mathfrak{R}_{\rm IV}$的羣Γ是由变形:

$$w=\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\frac{i}{2}(zz'-1)\right)A'+zB'\right]\binom{1}{i}\right\}^{-1}\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\frac{i}{2}(zz'-1)\right)C'+zD'\right\} \tag{4.4.1}$$

所組成的,此处$A=A^{(2)}, B=B^{(2,n)}, C=C^{(n,2)}, D=D^{(n)}$是实矩陣,且适合于(华罗庚[2])

$$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I^{(2)}&0\\0&-I^{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}I^{(2)}&0\\0&-I^{(n)}\end{pmatrix} \tag{4.4.2}$$

及

$$\det A>0. \tag{4.4.3}$$

今往写出Γ中把任一点z_0变为原点的变形.由z_0作一$2\times n$的矩陣

$$X_0=2\begin{pmatrix}z_0z_0'+1, & i(z_0z_0'-1)\\ \overline{z_0z_0'}+1, & -i(\overline{z_0z_0'}-1)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}z_0\\ \bar{z}_0\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{1-|z_0z_0'|^2}\begin{pmatrix}z_0+\bar{z}_0-(\overline{z_0z_0'}z_0+z_0z_0'\bar{z}_0)\\ i(z_0-\bar{z}_0)+i(\overline{z_0z_0'}z_0-z_0z_0'\bar{z}_0)\end{pmatrix}. \tag{4.4.4}$$

这一矩陣显然是实的，由此作出

$$I - X_0 X_0' = \overline{\begin{pmatrix} z_0 z_0' + 1 & i(z_0 z_0' - 1) \\ \overline{z_0 z_0'} + 1 & -i(\overline{z_0 z_0'} - 1) \end{pmatrix}}^{-1} \left\{ \overline{\begin{pmatrix} z_0 z_0' + 1 & i(z_0 z_0' - 1) \\ \overline{z_0 z_0'} + 1 & -i(\overline{z_0 z_0'} - 1) \end{pmatrix}} \times \right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} z_0 z_0' + 1 & i(z_0 z_0' - 1) \\ \overline{z_0 z_0'} + 1 & -i(\overline{z_0 z_0'} - 1) \end{pmatrix}' - 4 \overline{\begin{pmatrix} z_0 \\ \bar{z}_0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} z_0 \\ \bar{z}_0 \end{pmatrix}' \right\} \begin{pmatrix} z_0 z_0' + 1 & i(z_0 z_0' - 1) \\ \overline{z_0 z_0'} + 1 & -i(\overline{z_0 z_0'} - 1) \end{pmatrix}'^{-1} =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} z_0 z_0' + 1, & i(z_0 z_0' - 1) \\ \overline{z_0 z_0'} + 1, & -i(\overline{z_0 z_0'} - 1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 + |z_0 z_0'|^2 - 2 \bar{z}_0 z_0' & 0 \\ 0 & 1 + |z_0 z_0'| - 2 z_0 \bar{z}_0' \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} z_0 z_0' + 1, & i(z_0 z_0' - 1) \\ \overline{z_0 z_0'} + 1, & -i(\overline{z_0 z_0'} - 1) \end{pmatrix}'^{-1}, \tag{4.4.5}$$

因而易得

$$(I - X_0 X_0')^{-1} = \frac{1}{(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2 \bar{z}_0 z_0')} \begin{pmatrix} (z_0 z_0' + 1)(\overline{z_0 z_0'} + 1) & i(z_0 z_0' - \overline{z_0 z_0'}) \\ i(z_0 z_0' - \overline{z_0 z_0'}) & (z_0 z_0' - 1)(\overline{z_0 z_0'} - 1) \end{pmatrix}. \tag{4.4.6}$$

此可以写成为 $A'A$，此处

$$A = \frac{1}{2(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2 \bar{z}_0 z_0')^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} -i(z_0 z_0' - \overline{z_0 z_0'}) & (z_0 z_0' + \overline{z_0 z_0'} - 2) \\ (z_0 z_0' + \overline{z_0 z_0'} + 2) & i(z_0 z_0' - \overline{z_0 z_0'}) \end{pmatrix}. \tag{4.4.7}$$

作变形

$$w = \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}(z z' + 1), \frac{i}{2}(z z' - 1) \right) A' - z X_0' A' \right] \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}^{-1} \times$$

$$\times \left\{ z D' - \left(\frac{1}{2}(z z' + 1), \frac{i}{2}(z z' - 1) \right) X_0 D' \right\}, \tag{4.4.8}$$

这一变形属于 (4.4.1) 且把 z_0 变为 0.

又

$$\det A = \det D = \frac{(1 - |z_0 z_0'|^2)}{(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2 \bar{z}_0 z_0')}, \tag{4.4.9}$$

微分 (4.4.8) 得

$$dw = \left\{ dz \cdot D' - \left(\sum_{p=1}^{n} z^p dz^p, i \sum_{p=1}^{n} z^p dz^p \right) X_0 D' \right\} \times$$

$$\times \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}(z z' + 1), \frac{i}{2}(z z' - 1) \right) A' - z X_0' A' \right] \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}^{-1} + \left\{ z D' - \left(\frac{1}{2}(z z' + 1), \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{i}{2}(z z' - 1) \right) X_0 D' \right\} d \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}(z z' + 1), \frac{i}{2}(z z' - 1) \right) A' - z X_0' A' \right] \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}^{-1}.$$

命 $z = z_0$ 得

$$dw = \left\{ dz \cdot D' - \left(\sum_{p=1}^{n} z_0^p dz^p, i \sum_{p=1}^{n} z_0^p dz^p \right) X_0 D' \right\} \times$$

$$\times \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}(z_0 z_0' + 1), \frac{i}{2}(z_0 z_0' - 1) \right) A' - z_0 X_0' A' \right] \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}^{-1},$$

即

$$dw = \{dz \cdot D' - (1, i)\, dz \cdot z_0' X_0 D'\} \times$$
$$\times \left\{\left[\left(\frac{1}{2}(z_0 z_0' + 1), \frac{i}{2}(z_0 z_0' - 1)\right) A' - z_0 X_0' A'\right]\binom{1}{i}\right\}^{-1}. \tag{4.4.10}$$

以 (4.4.4) 及 (4.4.7) 代入并化簡得

$$dw = dz \left\{I - 2\frac{z_0' \bar{z}_0 - \overline{z_0 z_0'} z_0' z_0}{(1 - |z_0 z_0'|^2)}\right\} D' \frac{1}{i(1 + |z_0 z_0'| - 2\bar{z}_0 z_0')^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.4.11}$$

故由 (4.4.9) 得

$$\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=z_0} = \det\left\{I - 2\frac{z_0' \bar{z}_0 - \overline{z_0 z_0'} z_0' z_0}{(1 - |z_0 z_0'|^2)}\right\} \frac{(1 - |z_0 z_0'|^2)}{(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0')} \times$$
$$\times \frac{1}{(1 + |z_0 z_0'| - 2\bar{z}_0 z_0')^{\frac{n}{2}}},$$

即

$$\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2_{z=z_0} = \frac{1}{(1 + |z_0 z_0'| - 2\bar{z}_0 z_0')^n}. \tag{4.4.12}$$

在此引用了下面的等式

$$\det\left\{I - 2\frac{z_0' \bar{z}_0 - \overline{z_0 z_0'} z_0' z_0}{(1 - |z_0 z_0'|^2)}\right\} = \frac{1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0'}{1 - |z_0 z_0'|^2}. \tag{4.4.13}$$

此等式的証明可由以下更普遍的結果推得之．若 u 及 v 是二矢量，則 $\det(I - u'\bar{v}) = 1 - \bar{v}u'$．此乃定理 2.1.2 的特例．故得

定理 4.4.1. 域 $\mathfrak{R}_{IV}$ 的核函数等于

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{IV})} \frac{1}{(1 + |zz'|^2 - 2\bar{z}z')^n},$$

此处由 (2.5.7) 知

$$V(\mathfrak{R}_{IV}) = \frac{\pi^n}{2^{n-1} n!}.$$

§ 4.5. 圓型域的特征流形

假定 $\mathfrak{R}$ 是以原点为中心的有界圓型域并且是单联的；并假定边界上有一流形 $\mathfrak{C}$，其上之点为 $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^n)$，其表示法見本章之首，这一流形也是圓型的．

現在我們研究矢量 $z^{[f]}$，它是由

$$\sqrt{\frac{f!}{a_1! \cdots a_n!}} z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n}, \quad a_1 + \cdots + a_n = f \tag{4.5.1}$$

为支量而組成的，$z^{[f]}$ 的維数等于

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+f-1)}{f!} = \binom{n+f-1}{f}. \tag{4.5.2}$$

由 (4.1.4) 及 (4.1.5) 可知,若 $f\neq g$, 則

$$\int_{\mathfrak{R}} z^{[f]'}\overline{z^{[g]}}\dot{z}=0. \tag{4.5.3}$$

又可知

$$\int_{\mathfrak{R}} z^{[f]'}\overline{z^{[f]}}\dot{z}=H_f \tag{4.5.4}$$

是一定正的 Hermite 方陣,因此存在一非奇异方陣 N_f 使

$$H_f=N_f'\overline{N}_f.$$

命

$$z_f=z^{[f]}N_f^{-1}, \tag{4.5.5}$$

則有

$$\int_{\mathfrak{R}} z_f'\bar{z}_f\dot{z}=I_f, \tag{4.5.6}$$

这 z_f 是 $\binom{n+f-1}{f}$ 維的矢量,其支量以

$$\varphi_f^{(i)}(z),\qquad i=1,2,\cdots,N=\binom{n+f-1}{f}$$

表示. 如此所得的函数貫

$$\varphi_f^{(i)}(z),\qquad i=1,2,\cdots,N,\qquad f=0,1,2,\cdots \tag{4.5.7}$$

在 $\mathfrak{R}$ 中成一正常正交完整系(定理 4.1.1).

对流形 $\mathfrak{C}$ 上的矢量 ξ, 使 $\xi^{[f]}$ 及 ξ_f 分别为

$$\xi^{[f]}=\left\{\sqrt{\frac{f!}{a_1!\cdots a_n!}}\,\xi_1^{a_1}\cdots\xi_n^{a_n}\right\},\qquad a_1+\cdots+a_n=f$$

及

$$\xi_f=\{\varphi_f^{(i)}(\xi)\}_{i=1,2,\cdots,N}.$$

由 (4.1.6) 可知,若 $f\neq g$, 則

$$\int_{\mathfrak{C}} \xi^{[f]'}\overline{\xi^{[g]}}\dot{\xi}=0, \tag{4.5.8}$$

即对不同的 f 是正交的,但

$$\int_{\mathfrak{C}} \xi_f'\bar{\xi}_f\dot{\xi}=K_f \tag{4.5.9}$$

不一定等于 I_f. 此 K_f 乃一定正方陣,我們有一酉方陣 U 使

$$\overline{U}'\left(\int_{\mathfrak{C}} \xi_f'\bar{\xi}_f\dot{\xi}\right)U=\overline{U}'K_fU=\Lambda, \tag{4.5.10}$$

此处 Λ 是一对角綫方陣,其对元素是正的. 显然

$$z_f\overline{U}$$

的支量还是正交正常的,所以我們不妨假定

$$\int_{\mathfrak{C}} \xi'_f \bar{\xi}_f \dot{\xi} = \Lambda, \tag{4.5.11}$$

即不妨假定

$$\int_{\mathfrak{C}} |\varphi_f^{(i)}(\xi)|^2 \dot{\xi} = \beta_f^{(i)}, \tag{4.5.12}$$

所以

$$\left\{\frac{\varphi_f^{(i)}(\xi)}{\sqrt{\beta_f^{(i)}}}\right\}, \qquad i = 1, 2, \cdots, N, \qquad f = 0, 1, 2, \cdots \tag{4.5.13}$$

在流形 $\mathfrak{C}$ 上成一正交正常系(注意,在 $\mathfrak{C}^a$ 上它并不是完整的).

§ 4.6. Cauchy 核

今后的目的在于研究 Cauchy 核:

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_f^{(i)}(z)\, \overline{\varphi_f^{(i)}(\xi)}}{\rho_f^{(i)}} = H(z, \bar{\xi}), \tag{4.6.1}$$

此处 z 在域 $\mathfrak{R}$ 中变, ξ 在流形 $\mathfrak{C}$ 上变. 命 Γ_0 表此域的对原点的稳定分羣,显然 $\mathfrak{C}$ 經过 Γ_0 而不变,今再命 $\mathfrak{C}$ 上的任一点可經 Γ_0 的变换变到其他 $\mathfrak{C}$ 上的任一点.

定理 4.6.1. 級数

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{|\varphi_f^{(i)}(\xi)|^2}{\beta_f^{(i)}} r^f \tag{4.6.2}$$

当 $\xi \in \mathfrak{C}$, $0 \leqslant r \leqslant r_0\,(<1)$ 时一致收斂,且等于 $\dfrac{1}{V(\mathfrak{C})}(1-r)^{-n}$.

証: § 4.2 已經說过, Γ_0 的变换不妨假定就是酉綫性变换.

将关系 (4.5.11) 代入 (4.6.2) 可得

$$\sum_{f,\, i} \frac{|\varphi_f^{(i)}(\xi)|^2}{\beta_f^{(i)}} r^f = \sum_f \xi_f \Lambda^{-1} \bar{\xi}'_f r^f$$

$$= \sum_f \xi^{[f]} N_f^{-1} \Lambda^{-1} \bar{N}_f'^{-1} \overline{\xi^{[f]}}' r^f = \sum_f \xi^{[f]} \left(\int_{\mathfrak{C}} \overline{\eta^{[f]}}' \eta^{[f]} \dot{\eta}\right)^{-1} \overline{\xi^{[f]}}' r^f. \tag{4.6.3}$$

作变换

$$\xi = \zeta U,$$

$U \in \Gamma_0$ 由于經上式之变换 $\xi^{[f]}$ 变为 $\zeta^{[f]} U^{[f]}$, 所以

$$\xi^{[f]} \left(\int_{\mathfrak{C}} \overline{\eta^{[f]}}' \eta^{[f]} \dot{\eta}\right)^{-1} \overline{\xi^{[f]}}' = \zeta^{[f]} U^{[f]} \left(\int_{\mathfrak{C}} \overline{\eta^{[f]}}' \eta^{[f]} \dot{\eta}\right)^{-1} \overline{U^{[f]}}' \overline{\zeta^{[f]}}'$$

$$= \zeta^{[f]} \left(\int_{\mathfrak{C}} (\bar{\eta}^{[f]} U^{[f]})' (\eta^{[f]} \overline{U^{[f]}}) \dot{\eta}\right)^{-1} \overline{\zeta^{[f]}}' = \zeta^{[f]} \left(\int_{\mathfrak{C}} \overline{\eta^{[f]}}' \eta^{[f]} \dot{\eta}\right)^{-1} \overline{\zeta^{[f]}}'.$$

上式对任意 $\mathfrak{C}$ 上的两点 ξ 及 ζ 皆能成立，此示上式与 ξ 无关. 对 ζ 积分得

$$\xi^{[f]}\left(\int_{\mathfrak{C}}\overline{\eta^{[f]}}'\eta^{[f]}\dot{\eta}\right)^{-1}\overline{\xi^{[f]}}'\int_{\mathfrak{C}}\dot{\zeta}=\int_{\mathfrak{C}}\zeta^{[f]}\left(\int_{\mathfrak{C}}\overline{\eta^{[f]}}'\eta^{[f]}\dot{\eta}\right)^{-1}\overline{\zeta^{[f]}}'\dot{\zeta}$$

$$=\sigma\left(\left(\int_{\mathfrak{C}}\overline{\eta^{[f]}}'\eta^{[f]}\dot{\eta}\right)^{-1}\int_{\mathfrak{C}}\overline{\zeta^{[f]}}'\zeta^{[f]}\dot{\zeta}\right)=\sigma(I_f)=\binom{n+f-1}{f}. \tag{4.6.4}$$

以 (4.6.4) 代入 (4.6.3) 即得

$$\sum_{f,i}\frac{|\varphi_f^{(i)}(\xi)|^2}{\beta_f^{(i)}}r^f=\frac{1}{V(\mathfrak{C})}\sum_{f=0}^{\infty}\binom{n+f-1}{f}r^f=\frac{1}{V(\mathfrak{C})}(1-r)^{-n},$$

此处 $V(\mathfrak{C})=\int_{\mathfrak{C}}\dot{\zeta}$. 定理 4.6.1 証明.

用 Буняковский 不等式立得

定理 4.6.2. 若 ξ 与 η 都在 $\mathfrak{C}$ 上，則級数

$$\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{N}\frac{\varphi_f^{(i)}(\eta)\,\overline{\varphi_f^{(i)}(\xi)}}{\beta_f^{(i)}}r^f \tag{4.6.5}$$

在 $0\leqslant r\leqslant r_0\,(<1)$ 中一致收斂并絕对收斂.

定理 4.6.3. 命 $\mathfrak{R}$ 表一圓型星狀域，又命 $\mathfrak{R}(r)$ 表由 $\mathfrak{R}$ 依原点縮小 r 倍而得的域 $(0<r<1)$. 当 z 在 $\mathfrak{R}(r)$ 的閉包上及 ξ 在 $\mathfrak{C}$ 上时，級数 (4.6.1) 一致收斂.

証：由于 $\mathfrak{R}$ 內有則的函数在 $\mathfrak{C}$ 上取极大模，故得

$$\left|\sum_{f=m}^{m'}\sum_i\frac{\varphi_f^{(i)}(z)\,\overline{\varphi_f^{(i)}(\xi)}}{\beta_f^{(i)}}\right|=\left|\sum_{f=m}^{m'}\sum_i\frac{\varphi_f^{(i)}\left(\frac{1}{r}z\right)\overline{\varphi_f^{(i)}(\xi)}}{\beta_f^{(i)}}r^f\right|$$

$$\leqslant\max_{\zeta\in\mathfrak{C}}\left|\sum_{f=m}^{m'}\sum_i\frac{\varphi_f^{(i)}(\zeta)\,\overline{\varphi_f^{(i)}(\xi)}}{\beta_f^{(i)}}r^f\right|.$$

当 $m,m'\to\infty$ 时，此式右边趋于 0. 故得定理.

§ 4.7. Cauchy 公式

定理 4.7.1. 如本章开始时的定义，假定 $\mathfrak{C}$ 是域 $\mathfrak{R}$ 边界上的流形；$f(\xi)$ 是 $\mathfrak{C}$ 上的連續函数，則积分

$$\varphi(z)=\int_{\mathfrak{C}}H(z,\bar{\xi})\,f(\xi)\,\dot{\xi} \tag{4.7.1}$$

表示一个在 $\mathfrak{R}$ 上处处都正則的函数. 特別当 $f(z)$ 是在 $\mathfrak{R}$ 域及其边界上时，它是解析的函数

$$f(z)=\int_{\mathfrak{C}}H(z,\bar{\xi})\,f(\xi)\,\dot{\xi}.$$

这定理是由 $H(z,\bar{\xi})$ 的級数的一致收斂性所得的 (定理 4.6.3).

定理 4.7.2. 設 $\{\psi_\nu(\xi)\}$ 是 $\mathfrak{C}$ 上的一正常正交函数系且具有下列的性質：(i) $\psi_\nu(z)$ 在 $\mathfrak{R}$ 及其边界上为解析；(ii) $H_1(z, \bar{\xi}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(z)\overline{\psi_\nu(\xi)}$·当 $\xi \in \mathfrak{C}$, z 在 $\mathfrak{R}$ 中的任一閉域內时一致收斂；(iii) 任一在 $\mathfrak{R}$ 及其边界上解析的函数 $f(z)$ 能够展为

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \psi_\nu(z).$$

若此級数在 $\mathfrak{R}$ 的閉域中一致收斂，則

$$H_1(z, \bar{\xi}) \equiv H(z, \bar{\xi}).$$

証：对于适合于上述条件的正交系 $\{\psi_\nu(\xi)\}$，容易証明定理 4.7.1 成立．換言之，如果 $f(z)$ 为在 $\mathfrak{R}$ 中及其边界上解析的函数，則

$$f(z) = \int_{\mathfrak{C}} H_1(z, \bar{\xi}) f(\xi) \dot{\xi}. \tag{4.7.2}$$

由定理 4.7.2 易知級数

$$H(z, \bar{w}) = \sum_{f, i} \frac{\varphi_f^{(i)}(z)\overline{\varphi_f^{(i)}(w)}}{\beta_f^{(i)}}.$$

当 z 在 $\mathfrak{R}$ 中任一閉域內时，w 在 $\mathfrak{R}$ 及其边界上一致收斂．$H_1(z,\bar{w})$ 亦有同样的性質．因此

$$H(z, \bar{w}) = \int_{\mathfrak{C}} H_1(z, \bar{\xi}) H(\xi, \bar{w}) \dot{\xi} = \overline{H_1(w, \bar{z})},$$

此示

$$H(z, \bar{w}) \equiv H_1(z, \bar{w}).$$

特别当 $w = \xi$ 时，定理証明．

定理 4.7.3. 若 $\mathfrak{R}$ 是一可遞域，其运动羣 Γ 的变换在 $\mathfrak{R}$ 及其边界上为解析并把 $\mathfrak{C}$ 变为其自己，則

$$H(z, \bar{\xi}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C})} B^{\frac{1}{2}}(z, z, U)\overline{B^{\frac{1}{2}}(\xi, z, U)},$$

此处 $B(\xi, z, U)$ 是 Γ 中把 z 点变为原点的变换函数行列式在 $\mathfrak{C}$ 上的值．

証：命 Γ 的变换把 a 点变为 O 点者为

$$w = f(z, a, U), \tag{4.7.3}$$

这变形把 $\mathfrak{C}$ 变为自己

$$\zeta = f(\xi, a, U). \tag{4.7.4}$$

命

$$\dot{\zeta} = B(\xi, a, U)\dot{\xi} \tag{4.7.5}$$

表 $\mathfrak{C}$ 上体积元素的变形关系．已知在 $\mathfrak{C}$ 上存在正常正交系 $\left\{\frac{\varphi_f^{(i)}(\xi)}{\sqrt{\beta_f^{(i)}}}\right\}$，为簡便計以 $\{\varphi_\nu(\zeta)\}$ 表之；

$$\int_{\mathfrak{C}} \varphi_\mu(\zeta)\overline{\varphi_\nu(\zeta)}\,\dot{\zeta} = \int_{\mathfrak{C}} \varphi_\mu(f(\xi))\overline{\varphi_\nu(f(\xi))}\,|B(\xi, a, U)|\,\dot{\xi} = \delta_{\mu\nu},$$

因此

$$\psi_\mu(\xi) = \varphi_\mu(f(\xi, a, U))\,B^{\frac{1}{2}}(\xi, a, U)$$

也是 $\mathfrak{C}$ 上的正常正交函数系. 現在証明 $\{\psi_\nu(\xi)\}$ 适合定理 4.7.2 所設的条件. 显然 $\psi_\nu(z)$ 在 $\mathfrak{C}$ 及其边界上解析,并且

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(z)\overline{\psi_\nu(\xi)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(w)\overline{\varphi_\nu(\zeta)}\,B^{\frac{1}{2}}(z, a, U)\,B^{\frac{1}{2}}(\xi, a, U). \tag{4.7.6}$$

命 (4.7.3) 的逆变换为

$$z = f^{-1}(w, a, U), \tag{4.7.7}$$

任一在 $\mathfrak{R}$ 及其边界上解析的函数 $\psi(z)$, 对应有在 $\mathfrak{R}$ 及其边界上解析的函数

$$\varphi(w) = \psi(f^{-1}(w, a, U))\,B^{-\frac{1}{2}}(z, a, U).$$

$\varphi(w)$ 能展为

$$\varphi(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(w),$$

故

$$\psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \psi_\nu(z).$$

此示定理 4.7.3 的条件 (iii) 适合,因此,从 (4.7.5) 可知

$$H(z, \bar{\xi}) = H(w, \bar{\zeta})\,B^{\frac{1}{2}}(z, a, U)\,\overline{B^{\frac{1}{2}}(\xi, a, U)}.$$

由于 $H(0, \bar{\zeta}) = \dfrac{1}{V(\mathfrak{C})}$, 把 a 换为 z 即得定理.

附記: 上面所述的正常正交系 $\{\varphi_\nu(\xi)\}$ 在 $\mathfrak{C}$ 上并不完整. 我們知道 $\mathfrak{C}$ 上的正常正交完整系是存在的 (H. Weyl [1]), 即除 $\varphi_\nu(\xi)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ 以外, 該完整系还有 $\varphi_{-\nu}(\xi)$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$. 所謂完整是对 $\mathfrak{C}$ 上的連續函数所成的綫性空間而言, 即如果 $g(\xi)$ 为 $\mathfrak{C}$ 上的連續函数 $\int_{\mathfrak{C}} g(\xi)\overline{\varphi_\nu(\xi)}\,\dot{\xi} = 0$ $(\nu = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$, 則 $g(\xi) \equiv 0$.

§ 4.8. 典型域的 Cauchy 核

若襄变数 t 的个数也是 n, 則 $B(\xi, a, U)$ 就是 $\left|\dfrac{\partial \xi}{\partial \zeta}\right|$, 因此以上的定理十分容易应用.

1°. 在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 中, 特征流形为 $U\overline{U}' = I$. 先假定 $m = n$, 这特征流形的維数是 n^2, 因此

$$H(Z, \overline{W}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})\det(I - Z\overline{U}')^n}, \tag{4.8.1}$$

此处由定理 3.1.1 知

$$V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(n-1)!\,(n-2)!\cdots 1!}.$$

如果 $m \neq n$. 假定 $m < n$, 我們有

$$H(Z, \bar{U}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_1)\det(I - Z\bar{U}'_{mn})^n}, \tag{4.8.2}$$

其中(見 §5.5)

$$V(\mathfrak{C}_1) = \frac{(2\pi)^{mn - \frac{1}{2}m(m-1)}}{(n-m)!\cdots(n-1)!}.$$

直接运用定理 4.7.4 并不容易得出(4.8.2), 現在我們运用另一种方法, 从(4.8.1)中得出(4.8.2)来. 已知

$$u(Z) = \frac{1}{V(U_n)}\int_{U_n}\frac{u(U_n)\dot{U}_n}{\det(I - ZU_n)^n}, \tag{4.8.3}$$

此处 U_n 过所有的 n 行列酉方陣. 命

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Z_1 = Z_1^{(m,n)}$$

及

$$U_n = \begin{pmatrix} U_{m,n} \\ V \end{pmatrix},$$

得

$$u\begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{V(U_n)}\int_{U_{m,n}}\int_V \frac{u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ V \end{pmatrix}}{\det(I - Z_1\bar{U}'_{m,n})^n}\dot{U}_{mn}\dot{V}$$

$$= \frac{1}{V(U_n)}\int_{U_{m,n}}\frac{\dot{U}_{m,n}}{\det(I - Z_1\bar{U}'_{m,n})^n}\int_V u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ V \end{pmatrix}\dot{V}, \tag{4.8.4}$$

此处 V 过适合于

$$V\bar{U}' = I^{(n,m)}, \qquad U_{m,n}\bar{V}' = 0 \tag{4.8.5}$$

的所有的 $(n-m, n)$ 矩陣.

对固定的 $U_{m,n}$, 我們有二酉方陣 $P = P^{(m)}$ 及 $Q = Q^{(n)}$, 使

$$PU_{m,n}Q = (I^{(m)}, 0).$$

由(4.8.5)立得

$$(I^{(m)}, 0)\bar{Q}'V' = 0,$$

即

$$VQ = (0, W), \qquad W = W^{(n-m)},$$

此处 W 是酉方陣; 故得

$$\int_V u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ V \end{pmatrix}\dot{V} = \int_W u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ (0, W)Q^{-1} \end{pmatrix}\dot{W}.$$

由(4.8.3)中以 $n-m$ 代 n 及 $Z = 0$ 可知

$$\int_V u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ V \end{pmatrix}\dot{V} = V(\dot{U}_{n-m})\, u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ 0 \end{pmatrix},$$

故由 (4.8.4) 可知

$$u\begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{V(U_{n-m})}{V(U_n)} \int_{U_{m,n}} \frac{u\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ 0 \end{pmatrix}}{\det (I - Z_1 \overline{U}'_{m,n})^n} \dot{U}_{mn}.$$

此卽为以 (4.8.4) 为核的 Cauchy 公式.

2°. $\mathfrak{R}_{II}$ 的特征流形为 $U\overline{U}' = I$, U 是对称的酉方陣.

$$H(Z,\overline{U}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II}) \det (I - Z\overline{U})^{\frac{1}{2}(n+1)}}, \tag{4.8.6}$$

其中(見 §3.5)

$$V(\mathfrak{C}_{II}) = 2^{\frac{n(3n+1)}{4}} \pi^{\frac{1}{4}n(n+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{\nu}{2} + 1\right)}{\Gamma(n+1-\nu)}.$$

3°. $\mathfrak{R}_{III}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_{III}$ 上之点为 K. 当 n 是偶数 K 是 (3.6 2) 所定义的方陣时,

$$H(Z, \overline{K}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{III}) \det (I + Z\overline{K})^{\frac{1}{2}(n-1)}}, \tag{4.8.7}$$

其中(見 §3.6)

$$V(\mathfrak{C}_{III}) = \frac{1}{2} \frac{((\nu-1)!)^2}{2^{(\nu-1)^2}} (8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{a=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma(a)}, \quad \nu = \frac{r}{2}.$$

当 n 是奇数 K 是 (3.6.16) 所定义的方陣时,

$$H(Z, \overline{K}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{III})(\det (I + Z\overline{K}))^{\frac{1}{2}n}}, \tag{4.8.8}$$

此处

$$V(\mathfrak{C}_{III}) = 2 \frac{((\nu-1)!)^2}{2^{(\nu-1)^2}} (8\pi)^{\frac{1}{4}n(n+1)-1} \prod_{a=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma(a)}, \qquad \nu = \frac{n+1}{2}.$$

(4.8.7) 易于由定理 4.7.4 推得. 現在我們由 (4.8.7) 来推出 (4.8.8).

取 $n+1$ 代替 n. 以 (4.8.7) 为核的 Cauchy 公式

$$u(Z) = \frac{1}{V} \int_K \frac{u(K)\dot{K}}{\det (I + Z\overline{K})^{\frac{1}{2}n}}, \qquad Z = Z^{(n+1)}, \qquad K = K^{(n+1)}, \tag{4.8.9}$$

此处

$$V = \frac{\frac{1}{2}((\nu-1)!)^2}{2^{(\nu-1)^2}} (8\pi)^{\frac{1}{4}n(n+1)} \prod_{a=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}a\right)}{\Gamma(a)}, \qquad \nu = \frac{1}{2}(n+1).$$

在 (4.8.4) 中取

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k' & K_1 \end{pmatrix},$$

此处 $Z_1 = Z_1^{(n)}$, $k = k^{(1,n)}$, $K_1 = K_1^{(n)}$, 如此则得

$$u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{V}\int_{K_1} \frac{\dot{K}_1}{\det(I + Z_1\overline{K}_1)^{\frac{1}{2}n}} \int_k u\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k' & K_1 \end{pmatrix} \dot{k}. \tag{4.8.10}$$

对一固定的 K_1, 因为 K 是酉方陣, 故得

$$k\overline{k}' = 1, \qquad k\overline{K}_1' = 0$$

及

$$k'\overline{k} + K_1\overline{K}_1' = I^{(n)}.$$

由于 $I - K_1\overline{K}_1' = k'\overline{k}$ 的秩等于 1, 且为冪等方陣($(k'\overline{k})^2 = k'(\overline{k}k')\overline{k} = k'\overline{k}$), 故有一酉方陣 U 使

$$U(I - K_1\overline{K}_1')\overline{U}' = [1, 0, \cdots, 0],$$

即

$$UK_1\overline{K}_1'\overline{U}' = [0, 1, \cdots, 1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}}',$$

此处

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

方陣 $UK_1\overline{K}_1'\overline{U}'$ 中 (1,1) 位置的元素为 0, 故得 UK_1 的第一行皆为零, 即得

$$UK_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}.$$

因此得

$$UK_1U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

此处 $Q = Q^{(n-1)} = Q'$, 且

$$Q\overline{Q}' = F\overline{F}',$$

即 $F^{-1}Q$ 是一酉方陣, 亦即 Q 是一斜对称酉方陣. 故有一酉方陣 U_0 使

$$U_0K_1U_0' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}. \tag{4.8.11}$$

命 $h = k\overline{U}_0$, 則

$$h\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} = -k\overline{U}_0U_0'\overline{K}_1'U_0 = 0,$$

立得 $h = (e^{i\theta}, 0, \cdots, 0)$.

研究积分

$$I = \int_k u\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k' & K_1 \end{pmatrix}\dot{k},$$

对一固定的 K_1 (如 4.8.11 的形式), 有

$$I = \int_0^{2\pi} u\begin{pmatrix} 0 & hU_0' \\ -U_0h' & \overline{U}_0'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}\overline{U}_0 \end{pmatrix} d\theta = 2\pi u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{U}_0'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}\overline{U}_0 \end{pmatrix}.$$

[我們应用公式 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_1 e^{i\theta}, \cdots, z_n e^{i\theta})\, d\theta = f(0, \cdots, 0)$，此处 $f(z)$ 是在一包含原点为中心的圓型域的閉包 $\overline{\mathscr{D}}$ 內解析的函数，并且 $z \in \overline{\mathscr{D}}$]．

4°．$\mathfrak{R}_{IV}$ 的特征流形为 $1 \leqslant \theta \leqslant \pi$，$xx' = 1$，$x = (x_1, \cdots, x_n)$ 是实的向量．

$$H(z, \theta, x) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{IV})[(x - e^{-i\theta}z)(x - e^{-i\theta}z)']^{\frac{1}{2}n}}, \tag{4.8.12}$$

其中容易算得

$$V(\mathfrak{C}_{IV}) = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}.$$

§4.9. Poisson 核

命 $\mathfrak{R}$ 表一如 §4.5所定义的有界圓型域，$\mathfrak{C}$ 为其特征流形，$\mathfrak{R}^*$ 表 $\mathfrak{R}$ 的閉包．由定理 4.7.1，对一个在 $\mathfrak{R}^*$ 上解析的函数，常有 Cauchy 公式

$$f(z) = \int_{\mathfrak{C}} H(z, \bar{\xi}) f(\xi) \dot{\xi}.$$

現在特別取

$$f(z) = H(z, \bar{w}) g(z),$$

此处 $g(z)$ 是一个在 $\mathfrak{R}^*$ 上解析的函数，則

$$H(z, \bar{w}) g(z) = \int_{\mathfrak{C}} H(z, \bar{\xi}) H(\xi, \bar{w}) g(\xi) \dot{\xi}.$$

命 $w = z$，我們立得 Poisson 公式

$$g(z) = \int_{\mathfrak{C}} P(z, \xi) g(\xi) \dot{\xi}, \tag{4.9.1}$$

此处

$$P(z, \xi) = \frac{H(z, \bar{\xi}) H(\xi, \bar{z})}{H(z, \bar{z})} \tag{4.9.2}$$

称为 Poisson 核．

以上仅說明：当 $g(z)$ 是 $\mathfrak{R}^*$ 上的解析函数时，(4.9.1) 成立．但积分 (4.9.1) 的存在性仅需由 $g(\xi)$ 在 $\mathfrak{C}$ 上为連續即可保証，即对一个在 $\mathfrak{C}$ 上連續的函数 $u(\xi)$，积分

$$u(z) = \int_{\mathfrak{C}} P(z, \xi) u(\xi) \dot{\xi} \tag{4.9.3}$$

常有意义．如此定义的 $u(z)$ 即称为 $\mathfrak{R}$ 域的調和函数．我們希望在 $\mathfrak{C}$ 上有一个完整正交正常系 $\{\psi_\nu(\xi)\}$，因而 $\mathfrak{R}$ 中的調和函数集是 $\{\psi_\nu(z)\}$ 的綫性包．

若 $\mathfrak{R}$ 适合定理 4.7.3 的假定，則 Poisson 核取极簡单的形式

$$P(z, \xi) = \frac{1}{V(\mathfrak{C})} |B(\xi, z, \bar{U})|. \tag{4.9.4}$$

关于四类典型域的 Poisson 核各如下:

1) 对于 $\mathfrak{R}_{\rm I}$. 我們有

$$P(Z, U) = \frac{\det(I - Z\bar{Z}')^n}{V(\mathfrak{C}_{\rm I})\,|\det(I - Z\bar{U}')|^{2n}}, \tag{4.9.5}$$

此 U 在 $\mathfrak{C}_{\rm I}$ 上. 当 $m = n$ 时可以另写为

$$P(Z, U) = \frac{\det(I - Z\bar{Z}')^n}{V(\mathfrak{C}_{\rm I})\,|\det(Z - U)|^{2n}}.$$

2) 对于 $\mathfrak{R}_{\rm II}$.

$$P(Z, S) = \frac{\det(I - Z\bar{Z}')^{\frac{1}{2}(n+1)}}{V(\mathfrak{C}_{\rm II})\,|\det(I - ZS)|^{n+1}}, \tag{4.9.6}$$

此处 S 在 $\mathfrak{C}_{\rm II}$ 上.

3) 对于 $\mathfrak{R}_{\rm III}$. 若 n 为偶数, 則

$$P(Z, K) = \frac{\det(I + Z\bar{Z})^{\frac{1}{2}(n-1)}}{V(\mathfrak{C}_{\rm III})\,|\det(I + Z\bar{K})|^{n-1}}; \tag{4.9.7}$$

若 n 为奇数,則

$$P(Z, K) = \frac{\det(I + Z\bar{Z})^{\frac{1}{2}n}}{V(\mathfrak{C}_{\rm III})\,|\det(I + Z\bar{K})|^{n}}, \tag{4.9.8}$$

此 K 在 $\mathfrak{C}_{\rm III}$ 上.

4) 对于 $\mathfrak{R}_{\rm IV}$.

$$P(z, \xi) = \frac{(1 + |zz'|^2 - 2\bar{z}z')^{\frac{1}{2}n}}{V(\mathfrak{C}_{\rm IV})\,|(z - \xi)(z - \xi)'|^{n}}, \tag{4.9.9}$$

此处 ξ 在 $\mathfrak{C}_{\rm IV}$ 上.

第 五 章

矩陣双曲空間的調和分析

§ 5.1. 矩陣双曲空間的正交系

命 $x=(x_1, \cdots, x_L)$ 表一 L 維空間的矢量；命 $x^{[f]}$ 表示由支量

$$\sqrt{\frac{f!}{j_1!\cdots j_L!}}\,x_1^{j_1}\cdots x_L^{j_L} \qquad (j_1+\cdots+j_L=f), \tag{5.1.1}$$

所成的矢量，它的維数等于

$$\frac{1}{f!}L(L+1)\cdots(L+f-1). \tag{5.1.2}$$

当 x 經由以 P 为方陣的綫性变換变为 y 时，$x^{[f]}$ 經由以 $P^{[f]}$ 为方陣的綫性变換而变为 $y^{[f]}$. 矢量 $x^{[f]}$ 称为 x 的 f 級 Kronecker 冪乘积，对应的方陣 $P^{[f]}$ 也称为 P 的 f 級 Kronecker 冪乘积

显然 (5.1.1) 中包有所有的 f 次的单項式，換言之，$x_1, \cdots, x_L$ 的任一 f 次齐次式一定可以表成为 (5.1.1) 的綫性式． 因之，当 $f=0, 1, 2, \cdots$ 时，(5.1.1) 得出 $x_1, \cdots, x_L$ 的所有的单項式.

現在我們进一步說明定理 1.5.1 在羣表示論中的意义．等式

$$\sigma((P\cdot\times Q)^{[f]})=\sum_{\substack{f_1+\cdots+f_m=f\\ f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_m\geqslant 0}}\chi_{f_1,\cdots,f_m}(P)\,\chi_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(Q),\quad P\in GL_m,\quad Q\in GL_n \tag{5.1.3}$$

說明了以下的事实：GL_m 与 GL_n 的直乘积的 f 級 Kronecker 冪乘积可以分解为如次的支量的直和并且每一支量仅出現一次，其中不可分解支量是 GL_m 的以 $(f_1, \cdots, f_m)$ 为标签的表示和 GL_n 的以 $(f_1, \cdots, f_m, 0, \cdots, 0)$ 为标签的表示的直乘积.

更具体些：考虑变形

$$W=PZQ, \tag{5.1.4}$$

此处 $Z=Z^{(m,n)}$, $W=W^{(m,n)}$ 是变数，$P=P^{(m)}$, $Q=Q^{(n)}$ 是系数，将 Z 的元素排成为矢量

$$z=(z_{11}, \cdots, z_{1n}, z_{21}, \cdots, z_{2n}, \cdots, z_{m1}, \cdots, z_{mn}), \tag{5.1.5}$$

W 也相当地排成为 w，則当 Z 經 (5.1.4) 而变为 W 时，z 經一綫性变形而变为 w．这变形的方陣是 P 与 Q 的直乘积，即 $P\cdot\times Q$，而变 $z^{[f]}$ 为 $w^{[f]}$ 的变形的方陣是 $(P\cdot\times Q)^{[f]}$. (1.5.3) 証明了 $z^{[f]}$ 所张的空間可以分裂为如下的一些子空間，其維数等于

$$N(f_1, \cdots, f_m)\,N(f_1, \cdots, f_m, 0, \cdots, 0) \quad (= q(f_1, \cdots, f_m),\ 定义). \tag{5.1.6}$$

命其支量为

$$\psi^{(i)}_{f_1, \cdots, f_m}(Z), \qquad i = 1, 2, \cdots, q(f_1, \cdots, f_m). \tag{5.1.7}$$

当 Z 由 (5.1.4) 而变为 W 时，(5.1.7) 变为 $\psi^{(i)}_{f_1, \cdots, f_m}(W)$ 的綫性式，其方陣是

$$A_{f_1, \cdots, f_m}(P) \cdot \times A_{f_1, \cdots, f_m, 0, \cdots, 0}(Q). \tag{5.1.8}$$

域 $\Re_I$ 在零点的稳定变换羣是由

$$W = U'ZV$$

所演成的，此处 U 及 V 各过 m 行列及 n 行列的酉方陣；对不同的 $(f_1, \cdots, f_m)$，

$$A_{f_1, \cdots, f_m}(U) \cdot \times A_{f_1, \cdots, f_m, 0, \cdots, 0}(V)$$

各不相似．因此得出（应用 Schur 引理）

$$\int \cdots \int_{I - Z\bar{Z}' > 0} \psi^{(i)}_f(Z)\, \overline{\psi^{(j)}_g(Z)}\, \dot{Z} = \delta_{fg}\, \delta_{ij}\, \rho_f, \tag{5.1.9}$$

此处以 f 表 $(f_1, \cdots, f_n)$，此 ρ_f 与 i 无关，即

$$\{\psi^{(i)}_f(Z)\}_{i,f}$$

成一正交系．由第四章的結果知道它是完整的，所以今后的目的在于求出

$$\int \cdots \int_{I - Z\bar{Z}' > 0} |\psi^{(i)}_f(Z)|^2\, \dot{Z} = \rho_f \tag{5.1.10}$$

的数值．

在算出 (5.1.10) 之前，先說明一下 $\psi^{(i)}_{f_1, \cdots, f_m}(Z)$ 的具体来源，即先考虑如何从 Z 做出一矢量，当 Z 經 (5.1.4) 而变化时，这一矢量經 (5.1.8) 而变化．在回答这一問題之前，先将表示 $A_{f_1, \cdots, f_n}(Q)$ 說得更具体些．当 Q 是对角綫方陣

$$\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_m]$$

时，$A_{f_1, \cdots, f_n}(\Lambda)$ 也是对角綫方陣；經行之間的換位，对列也行同样的换位，使换得的 $A_{f_1, \cdots, f_n}(X)$ 当 $X = \Lambda$ 时，其最后几行当 $\lambda_n = 0$ 时为零，其次后几行当 $\lambda_{n-1} = 0$ 时为零等等．經如此安排之后，不妨假定我們的表示适合于

$$\lim_{\substack{\lambda_{m+1} \to 0 \\ \cdots\cdots \\ \lambda_n \to 0}} A_{f_1, \cdots, f_m, 0, \cdots, 0}(\Lambda) = \begin{pmatrix} A_{f_1, \cdots, f_m}([\lambda_1, \cdots, \lambda_m]) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可得，若

$$X = \begin{pmatrix} X_1^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$A_{f_1, \cdots, f_m, 0, \cdots, 0}(X) = \begin{pmatrix} A_{f_1, \cdots, f_m}(X_1^{(m)}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1.11}$$

假定 $n \geqslant m$. 把 $Z = Z^{(m,n)}$ 扩大成为 n 行列的方陣

$$\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix},$$

如此則

$$A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix} A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(Q)$$

$$= A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}\begin{pmatrix} PZQ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这說明了

$$A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(Z) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.1.12}$$

而

$$A_{f_1,\cdots,f_m}(P)\,L(Z)\,A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(Q) = L(PZQ). \tag{5.1.13}$$

这 $L(Z)$ 是一个 $N(f_1, \cdots, f_m)$ 行 $N(f_1, \cdots, f_m, 0, \cdots, 0)$ 列的矩陣，其中的元素是 Z 的元素的 f 次齐次式. 又如果把 L 中的元素排成一矢量 $l(Z)$，則当 Z 經 (5.1.4) 变换为 W 时，$l(Z)$ 經

$$A_{f_1,\cdots,f_m}(P) \cdot\times A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}(Q)$$

而变换为 $l(W)$. 因此不妨假定 $\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_m}(Z)$ 就是 $L(Z)$ 中的元素排列出来的，因而得出

$$\sum_{i=1}^{q(f_1,\cdots,f_m)} |\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_m}(Z)|^2 = \sigma(L(Z)\overline{L(Z)'}),$$

卽得出

$$q(f_1, \cdots, f_m)\,\rho_{f_1,\cdots,f_m} = \int\cdots\int_{I-Z\bar{Z}'>0} \sigma(L(Z)\overline{L(Z)'})\,\dot{Z}$$

$$= \int\cdots\int_{I-Z\bar{Z}'>0} \sigma\left(A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}\overline{A_{f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0}\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}'}\right)\dot{Z}$$

$$= \int\cdots\int_{I-Z\bar{Z}'>0} \sigma\,(A_{f_1,\cdots,f_m}(Z\bar{Z}'))\,\dot{Z} = \int\cdots\int_{I-Z\bar{Z}'>0} \chi_{f_1,\cdots,f_m}(Z\bar{Z}')\,\dot{Z}. \tag{5.1.14}$$

§ 5.2.　类函數的积分

今往研究积分

$$\Omega = \int\cdots\int_{I-Z\bar{Z}'>0} \chi(Z\bar{Z}')\,\dot{Z}, \tag{5.2.1}$$

此处 $\chi(W)$ 是一个类函数,即对任一非奇异的方陣 Γ 常有

$$\chi(W) = \chi(\Gamma W \Gamma^{-1}). \tag{5.2.2}$$

現在先討論 $m = n$ 的情形. 由定理 3.4.4 可知

$$\Omega = \frac{1}{n!} 2^{-\frac{n(n+1)}{2}} \varpi_n \varpi'_n \int_0^1 \cdots \int_0^1 \chi([\lambda_1, \cdots, \lambda_n]) D^2(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_n. \tag{5.2.3}$$

当 $\chi = \chi_f$ 时算出积分 (5.2.3) 須要以下的定理.

定理 5.2.1. 有如下的等式

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} \lambda_1^{l_1}, & \cdots, & \lambda_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n^{l_1}, & \cdots, & \lambda_n^{l_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1^{m_1}, & \cdots, & \lambda_1^{m_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n^{m_1}, & \cdots, & \lambda_n^{m_n} \end{vmatrix} (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{a-1}\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_n$$

$$= n! \frac{D(l_1, \cdots, l_n) D(m_1, \cdots, m_n)}{\prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{n} (l_j + m_k + a)}. \tag{5.2.4}$$

証: 这积分号下的函数等于

$$(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{a-1} \sum_i \varepsilon_{i_1, \cdots, i_n} \lambda_{i_1}^{l_1} \cdots \lambda_{i_n}^{l_n} \sum_k \varepsilon_{k_1, \cdots, k_n} \lambda_{k_1}^{m_1} \cdots \lambda_{k_n}^{m_n}$$

$$= (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{a-1} \sum_j \lambda_{j_1}^{l_1} \cdots \lambda_{j_n}^{l_n} \sum_s \varepsilon_{s_1, \cdots, s_n} \lambda_{j_1}^{m_{s_1}} \cdots \lambda_{j_n}^{m_{s_n}}.$$

求积分,可知 (5.2.4) 的左边等于

$$\sum_j \sum_s \varepsilon_{s_1, \cdots, s_n} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \lambda_{j_1}^{l_1 + m_{s_1} + a - 1} \cdots \lambda_{j_n}^{l_n + m_{s_n} + a - 1}\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_n$$

$$= \sum_j \sum_s \varepsilon_{s_1, \cdots, s_n} \frac{1}{l_1 + m_{s_1} + a} \cdots \frac{1}{l_n + m_{s_n} + a}$$

$$= \sum_j \begin{vmatrix} \frac{1}{l_1 + m_1 + a}, & \cdots, & \frac{1}{l_1 + m_n + a} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{l_n + m_1 + a}, & \cdots, & \frac{1}{l_n + m_n + a} \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} \frac{1}{l_1 + m_1 + a}, & \cdots, & \frac{1}{l_1 + m_n + a} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{l_n + m_1 + a}, & \cdots, & \frac{1}{l_n + m_n + a} \end{vmatrix}.$$

由定理 1.1.3 得出本定理.

特别取

$$m_1 = n - 1, \quad m_2 = n - 2, \quad \cdots, \quad m_n = 0, \quad a = 1$$

可得

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \chi_f([\lambda_1, \cdots, \lambda_n]) D^2(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_n$$

$$= n!\, ((n-1)! \cdots 2!\, 1!)^2 \prod_{j=1}^{n} \frac{l_j!}{(l_j + n)!} N(f_1, \cdots, f_n), \tag{5.2.5}$$

故当 $m = n$ 时

$$\Omega = \frac{1}{n!} 2^{-\frac{n(n+1)}{2}} \varpi_n \varpi'_n n! ((n-1)! \cdots 2!\, 1!)^2 \prod_{j=1}^{n} \frac{l_j!}{(l_j+n)!} N(f_1, \cdots, f_n)$$

$$= \pi^{n^2} \prod_{j=1}^{n} \frac{l_j!}{(l_j+n)!} N(f_1, \cdots, f_n). \tag{5.2.6}$$

§ 5.3. 續前

現在討論更一般的情形，即 $m \leqslant n$. 命

$$X = X^{(n)} = \begin{pmatrix} Z \\ * \end{pmatrix},$$

由定理 2.2.2 可知

$$\int_{I-Z\bar{Z}'>0} \cdots \int \chi(Z\bar{Z}') \det(I - Z\bar{Z}')^{\lambda} \dot{Z} = c_1 \int_{I-X\bar{X}'>0} \cdots \int \chi(Z\bar{Z}') (\det(I - Z\bar{Z}'))^{\lambda-(n-m)} \dot{X}, \tag{5.3.1}$$

此处

$$c_1 = \frac{n!\,(n+1)! \cdots (2n-m-1)!}{0!\,1! \cdots (n-m-1)!} \pi^{-n(n-m)},$$

λ 为任意的复变数使右端的积分为收斂者. 把 X 表成为 TU 的形式，此处 U 是一酉方陣，T 是一三角方陣，其主对角綫上的元素是实数，上方是零. 把 T 写成为

$$T = \begin{pmatrix} T_1^{(m)} & 0 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix},$$

立見 $Z = (T_1, 0)\,U$ 及 $Z\bar{Z}' = T_1\bar{T}_1'$, 故得(定理 3.4.3)

$$\int_{I-Z\bar{Z}'>0} \cdots \int \chi(Z\bar{Z}') \det(I - Z\bar{Z}')^{\lambda} \dot{Z}$$

$$= c_1 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} \varpi_n \int_{I-T\bar{T}'>0} \cdots \int \chi(T_1\bar{T}_1') (\det(I - T_1\bar{T}_1'))^{\lambda-(n-m)} t_1^{2(n-1)+1} \cdots t_{n-1}^3 t_n \dot{T}. \tag{5.3.2}$$

注意

$$I - T\bar{T}' = \begin{pmatrix} I - T_1\bar{T}_1', & -T_1\bar{T}_2' \\ -T_2\bar{T}_1', & I - T_2\bar{T}_2' - T_3\bar{T}_3' \end{pmatrix}$$

及恆等式

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - T_1\bar{T}_1' & -T_1\bar{T}_2' \\ -T_2\bar{T}_1' & I - T_2\bar{T}_2' - T_3\bar{T}_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \bar{P}' \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I - T_1\bar{T}_1' & 0 \\ 0 & I - T_2(I - \bar{T}_1'T_1)^{-1}\bar{T}_2' - T_3\bar{T}_3' \end{pmatrix},$$

此处 $P = T_2\bar{T}_1'(I - T_1\bar{T}_1')^{-1}$. 因为 $I - T_1\bar{T}_1'$ 是定正爱尔米方陣，故有一方陣 Γ 使 $(I - T_1\bar{T}_1')^{-1} = \Gamma\bar{\Gamma}'$. 命 $Q = T_2\Gamma$, 則得

$$\dot{Q} = (\det\Gamma\bar{\Gamma}')^{n-m}\dot{T}_2 = \det(I - T_1\bar{T}_1')^{-n+m}\dot{T}_2,$$

因之得出

$$\int\cdots\int_{I-Z\bar{Z}'>0}\chi(Z\bar{Z}')\det(I - Z\bar{Z}')^{\lambda}\dot{Z}$$

$$= c_1 2^{\frac{-n(n-1)}{2}}\varpi_n\int\cdots\int_{I-T_1\bar{T}_1'>0}\chi(T_1\bar{T}_1')\det(I - T_1\bar{T}_1')^{\lambda}t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_m^{2(n-m)+1}\dot{T}_1\times$$

$$\times\int\cdots\int_{I-Q\bar{Q}'-T_3\bar{T}_3'>0}t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n\dot{Q}\dot{T}_3. \qquad (5.3.3)$$

由于上式不論 λ 为何值均成立，特别令 $\lambda = 0$ 則得

$$\Omega = c_1 2^{\frac{-n(n-1)}{2}}\varpi_n\int\cdots\int_{I-T_1\bar{T}_1'>0}\chi(T_1\bar{T}_1')t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_m^{2(n-m)+1}\dot{T}\times$$

$$\times\int\cdots\int_{I-Q\bar{Q}'-T_3\bar{T}_3'>0}t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n\dot{Q}\dot{T}_3. \qquad (5.3.4)$$

今先算出第二因子的数值. 由于 $I - T_3\bar{T}_3'$ 是定正的爱尔米方陣，所以有一方陣 Γ 使 $(I - T_3\bar{T}_3') = \Gamma\bar{\Gamma}'$. 命 $Q = \Gamma R$, 則 $\dot{Q} = (\det\Gamma\bar{\Gamma}')^{n-m}\dot{R} = (\det(I - T_3\bar{T}_3'))^{n-m}\dot{R}$, 因此得到

$$\int\cdots\int_{I-Q\bar{Q}'-T_3\bar{T}_3'>0}t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n\dot{Q}\dot{T}_3$$

$$= \int\cdots\int_{I-R\bar{R}'>0}\dot{R}\int\cdots\int_{I-T_3\bar{T}_3'>0}t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\cdots t_{n-1}^3 t_n\det(I - T_3\bar{T}_3')^{n-m}\dot{T}_3$$

$$= V_{m,n-m}\int\cdots\int_{I-Z_3\bar{Z}_3'>0}\det(I - Z_3\bar{Z}_3')^{n-m}\dot{Z}_3/\varpi_{n-m}2^{\frac{-(n-m)(n-m-1)}{2}} \qquad (5.3.5)$$

(用定理 3.4.3).

又

$$\int\cdots\int_{I-T_1\bar{T}_1'>0}\chi(T_1\bar{T}_1')t_1^{2(n-1)+1}\cdots t_m^{2(n-m)+1}\dot{T}_1$$

$$= \frac{2^{\frac{m(n-1)}{2}}}{\varpi_m}\int\cdots\int_{I-Z_1\bar{Z}_1'>0}\chi(Z_1\bar{Z}_1')\det(Z_1\bar{Z}_1')^{n-m}\dot{Z}_1, \qquad (5.3.6)$$

故由 (5.3.4) 可知

$$\Omega = C\int\cdots\int_{I-Z_1\bar{Z}_1'>0}\chi(Z_1\bar{Z}_1')\det(Z_1\bar{Z}_1')^{n-m}\dot{Z}_1, \qquad (5.3.7)$$

此处 C 为仅与 n 及 m 有关的常数．今往算出于下：

在 (5.3.7) 中取 $\chi(Z_1\bar{Z}_1')=1$，則得[見 (5.3.9)]

$$V_{m,n}=C\int_{I-Z_1\bar{Z}_1'>0}\cdots\int \det(Z_1\bar{Z}_1')^{n-m}\dot{Z}_1$$

$$=C\pi^{m^2}\frac{(n-m)!\,(n-m+1)!\cdots(n-1)!}{n!\,(n+1)!\cdots(n+m-1)!},$$

此处 $V_{m,n}=V(\Re_1)$．所以（定理 2.2.1）

$$C=V_{m,n}\pi^{-m^2}\frac{n!\,(n+1)!\cdots(n+m-1)!}{(n-m)!\,(n-m+1)!\cdots(n-1)!}$$

$$=\pi^{m(n-m)}\frac{1!\,2!\cdots(m-1)!\,1!\,2!\cdots(n-1)!}{1!\,2!\cdots(m+n-1)!}\cdot\frac{n!\,(n+1)!\cdots(n+m-1)!}{(n-m)!\,(n-m+1)!\cdots(n-1)!}$$

$$=\pi^{m(n-m)}\frac{1!\,2!\cdots(m-1)!}{(n-m)!\,(n-m+1)!\cdots(n-1)!}=V_{m,n-m}.$$

于是

$$\Omega=\frac{1}{m!}V_{m,n-m}\int_{I-Z_1\bar{Z}_1'>0}\cdots\int\chi(Z_1\bar{Z}_1')\det(Z_1\bar{Z}_1')^{n-m}\dot{Z}_1. \tag{5.3.8}$$

又当 $\chi(X)=\chi_{f_1,\dots,f_m}(X)$ 时，由于

$$\chi_f(X)\,(\det X)^{n-m}=\chi_{f_1+n-m,\dots,f_m+n-m}(X)$$

及 (5.2.6) 可知

$$\int_{I-Z_1\bar{Z}_1'>0}\cdots\int\chi_f(Z_1\bar{Z}_1')\det(Z_1\bar{Z}_1')^{n-m}\dot{Z}_1$$

$$=2^{-m}\varpi_m\varpi_m'((m-1)!\cdots2!\,1!)^2\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}N(f_1,\cdots,f_m)$$

$$=\pi^{m^2}\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}N(f_1,\cdots,f_m), \tag{5.3.9}$$

故

$$\Omega=\pi^{m^2}V_{m,n-m}\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}N(f_1,\cdots,f_m). \tag{5.3.10}$$

§ 5.4. 核函数

至此我們已經完全定出 $\Re_1$ 的一个正交系，即

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_{f_1,\dots,f_m}}}\varphi^{(i)}_{f_1,\dots,f_m}(Z),\quad i=1,2,\cdots,N(f_1,\cdots,f_m)\,N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0).$$

由定理 4.1.1 已知它是完整的，今再由之而定出核函数．

在定理 1.3.1 中取 $\rho = m+1$，則当 $|\lambda_i|<1$ 时有等式

$$\left(\prod_{i=1}^{m}(1-\lambda_i)\right)^{-m-n} = c_{m-1}\sum_{l_1>\cdots>l_m\geqslant 0} a_{l_1+n-m}\cdots a_{l_m+n-m}\times$$

$$\times N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)\,\chi_{f_1,\cdots,f_m}([\lambda_1,\cdots,\lambda_m]), \tag{5.4.1}$$

此处 $a_l=(m+l)!/(m!\,l!)$ 及 $c_{m-1}^{-1}=a_{n-m}\cdots a_{n-1}$. 由于 $\chi(X)$ 及 $\det(I-X)$ 都是类函数，因之得出

$$(\det(I-W\bar{Z}'))^{-m-n} = c_{m-1}\sum_{l_1>\cdots>l_m\geqslant 0} a_{l_1+n-m}\cdots a_{l_m+n-m}\times$$

$$\times N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)\,\chi_{f_1,\cdots,f_m}(W\bar{Z}'). \tag{5.4.2}$$

此式当 $W\bar{Z}'$ 的特征根的絕对値皆小于 1 时真实.

若 W 与 Z 都在 $\mathfrak{R}_I$ 內，卽

$$I-W\bar{W}'>0,\qquad I-\bar{Z}'Z>0,$$

則对任一矢量 $z(\neq 0)$ 常有

$$zW\bar{Z}'Z\bar{W}'\bar{z}'<z\bar{z}'. \tag{5.4.3}$$

若 λ 是 $W\bar{Z}'$ 的特征根，卽如有一矢量 z 使

$$zW\bar{Z}'=\lambda z,$$

則

$$zW\bar{Z}'Z\bar{W}'\bar{z}'=|\lambda|^2 z\bar{z}'. \tag{5.4.4}$$

比較 (5.4.3) 及 (5.4.4) 可知 $|\lambda|<1$，故 (5.4.2) 当 W 及 Z 都在 $\mathfrak{R}_I$ 中时成立.

又已知

$$K(Z,\bar{W}) = \sum_f\sum_i \psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_m}(Z)\,\overline{\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_m}(W)}/\rho_{f_1,\cdots,f_m}$$

$$=\sum_f \chi_{f_1,\cdots,f_m}(Z\bar{W}')/\rho_{f_1,\cdots,f_m}. \tag{5.4.5}$$

由 (5.1.14) 及 (5.3.10) 可知

$$q(f_1,\cdots,f_m)\,\rho_{f_1,\cdots,f_m} = \pi^{m^2}V_{m,n-m}\sum_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}N(f_1,\cdots,f_m). \tag{5.4.6}$$

代入 (5.4.5)

$$K(Z,\bar{W}) = \frac{1}{\pi^{m^2}V_{m,n-m}}\sum_f\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n)!}{(l_j+n-m)!}N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0)\,\chi_{f_1,\cdots,f_m}(Z\bar{W}').$$

由 (5.4.2) 可知

$$K(Z,\bar{W}) = \frac{1}{\pi^{m^2}V_{m,n-m}}a_{n-m}\cdots a_{n-1}(m!)^m(\det(I-Z\bar{W}'))^{-m-n}$$

$$=c\,(\det(I-Z\bar{W}'))^{-m-n},$$

此处

$$c^{-1}=\pi^{m^2}V_{m,n-m}\prod_{i=1}^{m}\frac{(n-i)!}{(m+n-i)!}=\pi^{mn}\frac{1!\cdots(m-1)!}{n!\cdots(n+m-1)!}=V(\Re_{\mathrm{I}}).$$

这又証明了

$$K(Z,\overline{W})=\frac{1}{V(\Re_{\mathrm{I}})}(\det(I-Z\overline{W}'))^{-m-n}.$$

§ 5.5. 特征流形上的調和分析

仍假定 $n\geqslant m$. 今以 $U=U^{(m,n)}$ 表一适合于

$$U\overline{U}'=I^{(m)} \tag{5.5.1}$$

的矩陣，这流形以 $\mathfrak{U}_{m,n}$ 表之. 今先証明: $\mathfrak{U}_{m,n}$ 可看作为 $\mathfrak{U}_n$ 对其分羣 $\mathfrak{U}_{n-m}$ 的傍系. 而 $\mathfrak{U}_{m-n}$ 是由

$$\begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 \\ 0 & U_{n-m}\end{pmatrix}$$

定义的. 具体些: 若

$$U_n=\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ P\end{pmatrix},\qquad V_n=\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ Q\end{pmatrix},$$

則

$$U_nV_n^{-1}=\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ P\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{m,n} \\ Q\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U_{n-m}\end{pmatrix},$$

故得: 若 $f(U)$ 在 $\mathfrak{U}_{m,n}$ 上定义，則

$$\int_{\mathfrak{U}_n}\cdots\int f(U)\dot{U}_n=\int_{\mathfrak{U}_{m,n}}\cdots\int f(U)\dot{U}\int_{\mathfrak{U}_{n-m}}\cdots\int\dot{U}_{n-m}.$$

我們定义

$$\int_{\mathfrak{U}_{m,n}}\cdots\int f(U)\dot{U}=\frac{1}{\varpi_{n-m}}\int_{\mathfrak{U}_n}\cdots\int f(U)\dot{U}_n, \tag{5.5.2}$$

由此可見，$\mathfrak{U}_{m,n}$ 的体积等于

$$\frac{\varpi_n}{\varpi_{n-m}}=\frac{2^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}\pi^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}}{(n-m)!\cdots(n-1)!}.$$

又

$$P_f(U)=(\psi_f^{(1)}(U),\cdots,\psi_f^{(q(f))}(U)),$$
$$q(f)=N(f_1,\cdots,f_m)N(f_1,\cdots,f_m,0,\cdots,0).$$

已知

$$P_f(V^{(m)}UW^{(n)})=P_f(U)(A_{f_1,\dots,f_m}(V)\cdot\times A_{f_1,\dots,f_m,0,\dots,0}(W)). \tag{5.5.3}$$

作

$$\int_{U\overline{U}'=I}\cdots\int P_f(U)\overline{P_g(U)}'\dot{U}=R=R^{(q(f),q(g))},$$

因而得

$$R=(A_{f_1,\dots,f_m}(V)\cdot\times A_{f_1,\dots,f_m,0,\dots,0}(W))R\overline{(A_{g_1,\dots,g_m}(V)\cdot\times A_{g_1,\dots,g_m,0,\dots,0}(W))}'.$$

故若 $f \neq g$，則 $R = 0$；若 $f = g$，則 R 是一无向量，所以

$$\{\psi_f^{(i)}(U)\}$$

成一正交系．今往算出

$$\int_{U\bar{U}'=I}\cdots\int |\psi_f^{(i)}(U)|^2 \dot{U} = \beta_f,$$

此数仅与 f 有关．

$$q(f)\,\beta_f = \int_{U\bar{U}'=I}\cdots\int \sum_i |\psi_f^{(i)}(U)|^2 \dot{U}$$

$$= \int_{U\bar{U}'=I}\cdots\int \chi_f(U\bar{U}')\,\dot{U} = N(f_1, \cdots, f_m)\int_{U\bar{U}'=I}\cdots\int \dot{U},$$

即得

$$\beta_f = c/N(f_1, \cdots, f_m, 0, \cdots, 0),$$

此处

$$c = \frac{\varpi_n}{\varpi_{n-m}} = \frac{2^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}\pi^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}}{(n-m)!\cdots(n-1)!}.$$

再在定理 1.3.1 中取 $\rho = 1$，則得

$$\left(\prod_{i=1}^{m}(1-x_i)\right)^{-n} = \sum_{l_1>\cdots>l_m\geqslant 0} N(f_1, \cdots, f_m, 0, \cdots, 0)\,\chi_{f_1,\cdots,f_m}([x_1, \cdots, x_n]).$$

若 Z 在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 中，U 在 $\mathfrak{U}_{m,n}$ 上，則 $Z\bar{U}'$ 的特征根的絕对值都小于 1，故得

$$(\det(I - Z\bar{U}'))^{-n} = \sum_{l_1>\cdots>l_m\geqslant 0} N(f_1, \cdots, f_m, 0, \cdots, 0)\,\chi_{f_1,\cdots,f_m}(Z\bar{U}')$$

$$= c\sum_f \frac{1}{\beta_f}\sum_i \psi_f^{(i)}(Z)\,\overline{\psi_f^{(i)}(\bar{U})}; \tag{5.5.4}$$

并可証明：若 $0 < r < 1$，則当 Z 在 $rI - Z\bar{Z}' > 0$ 中时，級数 (5.5.4) 一致收斂．

若 $f(U)$ 是 $\mathfrak{U}_{m,n}$ 上的可积分函数，則級数乘以 $f(U)$ 并逐項积分可得

$$\int_{U\bar{U}'=I}\cdots\int \det(I - Z\bar{U}')^{-n} f(U)\,\dot{U} = \sum_{f,i} a_{f,i}\,\psi_f^{(i)}(Z)\Big/\sqrt{\beta_f},$$

此处

$$a_{f,i} = c\int_{U\bar{U}'=I}\cdots\int \frac{f(U)\,\overline{\psi_f^{(i)}(U)}}{\sqrt{\beta_f}}\,\dot{U}.$$

即得

定理 5.5.1. 若 $f(U)$ 是一个可积函数，对正交完整系

$$\left\{\psi_f^{(i)}(U)\Big/\sqrt{\beta_f}\right\}$$

的 Fourier 系数是

$$a_{f,i} = \frac{2^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}\pi^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}}{(n-1)!\cdots(n-m)!}\int\cdots\int_{U\bar{U}'=I} f(U)\frac{\overline{\psi_f^{(i)}(U)}}{\sqrt{\beta_f}}\dot{U},$$

則积分

$$\int\cdots\int_{U\bar{U}'=I} \det(I - Z\bar{U}')^{-n} f(U)\,\dot{U}$$

在域 $I - Z\bar{Z}' > 0$ 內表一解析函数，幷且它在此域內有解析表示法

$$\sum_{f,i} a_{f,i}\psi_f^{(i)}(Z)\Big/\sqrt{\beta_f}.$$

§ 5.6. Cauchy 型积分

現在我們只研究 $m = n$ 的情形，其他的情形幷无特殊困难. 今往研究在何种情形下积分

$$\int\cdots\int_{U} f(U)\det(I - Z\bar{U}')^{-n}\dot{U} \tag{5.6.1}$$

存在. 今假定 $f(U)$ 是一已給的連續函数.

定理 5.6.1. 若 $Z\bar{Z}'$ 的特征根都大于 1 或都小于 1，則对任一酉方陣 U，

$$\det(I - Z\bar{U}') \neq 0.$$

不然，常有 U 方陣使

$$\det(I - Z\bar{U}') = 0.$$

証：假定 $\det(I - Z\bar{U}') = 0$，則有一矢量 z 使

$$z(I - Z\bar{U}') = 0,$$

即

$$z = zZ\bar{U}'.$$

因此立得

$$z\bar{z}' = zZ\bar{Z}'\bar{z}'.$$

由此証明定理的前一部分.

在証明定理的后一部分时，我們可以假定 $Z = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ $(\lambda_\nu \geqslant 0)$ 而不失其普遍性. 由

$$\det\left(I^{(2)} - \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix}1-\lambda_1\cos\theta & -\lambda_1\sin\theta\\ \lambda_2\sin\theta & 1-\lambda_2\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$= 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\cos\theta + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

可推得

$$\cos\theta = \frac{1 + \lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{5.6.2}$$

若 $\lambda_1 \geqslant 1 \geqslant \lambda_2$，則 $1 + \lambda_1\lambda_2 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2$，故可选一 θ 使 (5.6.2) 成立． 因此証明了定理的第二部分．

由此推出

定理 5.6.2. 当 $I - Z\bar{Z}' > 0$ 或 $I - Z\bar{Z}' < 0$ 时，积分 (5.6.1) 有意义．

今再进一步説明此定理．

先扩大 $A_{f_1,\cdots,f_n}(U)$ 的定义，今后将不限于 $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0$ 的情形；我們简写作

$$A_f(U) = A_{f_1,\cdots,f_n}(U),$$

且以"$f \geqslant 0$"表示"$f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0$"．已知对 $f \geqslant 0$ 及 $l \geqslant 0$ 常有

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(U)(\det U)^l = A_{f_1+l,\cdots,f_n+l}(U).$$

对任意的 $f_1 \geqslant \cdots \geqslant f_n$ 我們有一正整数 l 使 $f_n + l \geqslant 0$，如此我們定义

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(U) = (\det U)^{-l} A_{f_1+l,\cdots,f_n+l}(U). \tag{5.6.3}$$

此定义与 l 的选擇无关．

易証

$$\overline{A_{f_1,\cdots,f_n}(U)'} = A_{-f_n,-f_{n-1},\cdots,-f_1}(U). \tag{5.6.4}$$

若 $f(U)$ 的 Fourier 展开式等于

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n}\sum_i a^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}\,\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(U)\Big/\sqrt{\beta_{f_1,\cdots,f_n}},$$

則当 Z 适合于 $I - Z\bar{Z}' > 0$ 时常有

$$f(Z) = \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i a^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}\,\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(Z)\Big/\sqrt{\beta_{f_1,\cdots,f_n}}. \tag{5.6.5}$$

又当 Z 适合于 $I - Z\bar{Z}' < 0$ 时，則

$$\int\cdots\int_U f(U)\det(I - Z\bar{U}')^{-n}\dot{U}$$

$$= (-\det Z)^{-n}\int\cdots\int_U f(U)\det(U)^n\det(I - UZ^{-1})^{-n}\dot{U}.$$

我們有

$$(\det U)^n \det(I - UZ^{-1})^{-n}$$

$$= C(\det U)^n \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i \psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(U)\,\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(Z^{-1})/\beta_{f_1,\cdots,f_n}$$

$$= C\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i \psi^{(i)}_{f_1+n,\cdots,f_n+n}(U)\,\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(Z^{-1})/\beta_{f_1,\cdots,f_n},$$

乘以 $f(U)$ 且逐項求积分可知

$$\int\cdots\int_U f(U)\det(I - Z\bar{U}')^{-n}\dot{U}$$

$$= (-\det Z)^n \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i b^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}\,\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(Z^{-1})\Big/\sqrt{\beta_{f_1,\cdots,f_n}},$$

此处

$$b^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}=C\int\cdots\int_U f(U)\,\psi^{(i)}_{f_1+n,\cdots,f_n+n}(U)\,\dot U\Big/\beta^{1/2}_{f_1,\cdots,f_n}$$

$$=C\int\cdots\int_U f(U)\,\psi^{(i)}_{-f_n-n,\cdots,-f_1-n}(\bar U')\,\dot U=a^{(i)}_{-f_n-n,\cdots,-f_1-n}.$$

总之，在 $I-Z\bar Z'<0$ 时，我們得出 Z^{-1} 的解析函数

$$\int\cdots\int_U f(U)\det(I-Z\bar U')^{-n}\dot U$$

$$=\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i a^{(i)}_{-f_n-n,\cdots,-f_1-n}\,\psi^{(i)}_{-f_n-n,\cdots,-f_1-n}(Z)/\beta^{1/2}_{f_1,\cdots,f_n}. \tag{5.6.6}$$

§ 5.7. 一个微分运算的方陣及調和函数

現在研究 $m=n$ 的情形，引进符号

$$\partial=\partial_Z=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z_{11}}, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial z_{1n}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial}{\partial z_{n1}}, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial z_{nn}}\end{pmatrix} \tag{5.7.1}$$

及 Hermitian 运算子

$$\Delta=\Delta_Z=\bar\partial(I^{(n)}-\bar Z'Z)\,\partial'. \tag{5.7.2}$$

說明得具体些，命 u 为 Z 的一个函数，Δu 表示 m 行列的方陣

$$\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\delta_{\alpha,\beta}-\sum_{k=1}^{n}\bar z_{k\alpha}z_{k\beta}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\bar z_{i\alpha}\,\partial z_{j\beta}}\right)_{1\leqslant i,\,j\leqslant n}. \tag{5.7.3}$$

定理 5.7.1. 命

$$Z=(AW+B)(CW+D)^{-1} \tag{5.7.4}$$

为一变 $\mathfrak{R}_{\rm I}$ 为其自己的变形，則 Hermitian 运算子 Δ_Z 与 Δ_W 相合 (conjunctive)，更清楚些有

$$\Delta_Z u=(B\bar W'+A)\,\Delta_W u\,\overline{(B\bar W'+A)}'.$$

証：已知 (5.7.4) 中的 A, B, C, D 适合于

$$\bar A'A-\bar C'C=I,\qquad \bar C'D=\bar A'B,\qquad \bar D'D-\bar B'B=I,$$

即得

$$Z=(W\bar B'+\bar A')^{-1}(W\bar D'+\bar C'). \tag{5.7.5}$$

微分 (5.7.4) 且运用 (5.7.5)，可得

$$\begin{aligned}dZ&=[A\,dW-(AW+B)(CW+D)^{-1}C\,dW](CW+D)^{-1}\\&=A\,dW-(W\bar B'+\bar A')^{-1}(W\bar D'+\bar C')\,C\,dW\,(CW+D)^{-1}\\&=(W\bar B'+\bar A')^{-1}dW(CW+D)^{-1}.\end{aligned}$$

因为

$$du = \sigma(dZ\,\partial'_Z u) = \sigma((W\bar{B}' + \bar{A}')^{-1}\,dW(CW + D)^{-1}\,\partial'_Z u)$$
$$= \sigma(dW(CW + D)^{-1}\,\partial'_Z u(W\bar{B}' + \bar{A}')^{-1}),$$

所以

$$\partial'_W u = (CW + D)^{-1}\,\partial'_Z u(W\bar{B}' + \bar{A}')^{-1},$$

即

$$\partial'_Z = (CW + D)\partial'_W(W\bar{B}' + \bar{A}'). \qquad (5.7.6)$$

又由 (5.7.4) 可得

$$I - \bar{Z}'Z = I - (\bar{W}'\bar{C}' + \bar{D}')^{-1}(\bar{W}'\bar{A}' + \bar{B}')(AW + B)(CW + D)^{-1}$$
$$= (\bar{W}'\bar{C}' + \bar{D}')^{-1}(I - \bar{W}'W)(CW + D)^{-1}.$$

由此可得

$$[\bar{\partial}_Z(I - \bar{Z}'Z)\partial'_Z]\,u = (B\bar{W}' + A)[\bar{\partial}_W(I - \bar{W}'W)\partial'_W]\,u(\overline{B\bar{W}' + A})'.$$

定义. 凡适合于微分方陣方程

$$\Delta u = 0 \qquad (5.7.7)$$

的函数 u 称为对域 $\mathfrak{R}_I$ 是調和的. (5.7.7) 代表 n^2 个微分方程，其中任意一个都是二級偏微分方程.

由定理 5.7.1 立得: 若 $u(Z)$ 对 $\mathfrak{R}_I$ 是一調和函数，則这一性質經 (5.7.4) 而不变.

定理 5.7.2. 对 $\mathfrak{C}_I$ 上的任一 U, Poisson 核

$$P(Z, U) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_I)}\,(\det(I - \bar{Z}'U)\,\det(I - \bar{U}'Z)/\det(I - Z\bar{Z}'))^{-n} \qquad (5.7.8)$$

是 Z 的一个調和函数.

在証明此定理之前，我們需要一个引理.

定理 5.7.3. 若 (5.7.4) 把 $\mathfrak{C}_I$ 的一点 U 变为另一点 V, 則

$$P(Z, U) = P(W, V)\,|\det(CU + D)|^{-2n}. \qquad (5.7.9)$$

証: 此結果可由下式

$$I - \bar{Z}'U = (\overline{CW + D})^{-1}(I - \bar{W}'V)(CU + D)^{-1}$$

推出.

定理 5.7.2 的証明:

1) 在 $Z = 0$ 时，我們有

$$V(\mathfrak{C}_I)[\Delta_Z P(Z, U)]_{Z=0} = V(\mathfrak{C}_I)(\bar{\partial}\partial' P(Z, U))_{Z=0}$$
$$= [\bar{\partial}\,(\det(I - \bar{Z}'U)^{-n})\,\partial'\,(\det(I - \bar{U}'Z)^{-n})$$
$$+ \bar{\partial}\,(\det(I - \bar{Z}'U)^{-n})\,\partial'\,(\det(I - \bar{Z}'Z)^{n})$$
$$+ \bar{\partial}\,(\det(I - \bar{Z}'Z)^{n})\,\partial'\,(\det(I - \bar{U}'Z)^{-n})$$
$$+ \bar{\partial}\partial'\,(\det(I - \bar{Z}'Z)^{n})]_{Z=0}. \qquad (5.7.10)$$

由于

$$\det(I - Z\bar{U}')^{-n} = 1 + n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}\bar{u}_{ij} + z_{ij}\text{ 的高于一次的項}$$

及

$$\det(I - \bar{Z}'Z)^{n} = 1 - n\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |z_{ij}|^2 + z_{ij}\text{ 的高于一次的項}$$

可知 (5.7.10) 等于

$$nUn\bar{U}' - n^2 I = 0.$$

2) 因为空間 $\mathfrak{R}_{\rm I}$ 对 (5.7.4) 来說是可递的，所以由定理 5.7.1 及 5.7.3 可以推得定理 5.7.2.

命 $u(U)$ 是 $\mathfrak{C}_{\rm I}$ 上的連續函数，則积分

$$u(Z) = \int_{\mathfrak{C}} P(Z, U)\, u(U)\, \dot{U} \tag{5.7.11}$$

当 $Z \in \mathfrak{R}_{\rm I}$ 时定义一函数；运用运算子 Δ 到积分号下，則由定理 5.7.2 立得

$$\Delta u(Z) = 0,$$

即 (5.7.11) 定义一調和函数.

自然的我們就有了"Dirichlet 問題"，即

1) 对一已給的 $u(U)$，(5.7.11) 是否适合于 (5.7.7) 的唯一解？

2) 是否 $\lim\limits_{Z\to U} u(Z) = u(U)$？

$u(U)$ 連續时，这一問題有了完整的解答. 見华罗庚[8]，并将在华罗庚、陸启鏗[1,2]合著的"典型域的調和函数論"中把这一綫索发展到四种典型域中.

第 六 章

对称及斜对称方陣双曲空間的調和分析

§ 6.1. 对称酉方陣上的正交系

現在研究具体地求出 $\mathfrak{R}_{II}$ 上及 $\mathfrak{C}_{II}$ 上的完整正交正常系的問題. 先研究变形

$$T = USU', \tag{6.1.1}$$

这一变形变对称酉方陣 S 为对称酉方陣 T, 此处 U 是一酉方陣. 將对称方陣 $S = (s_{ij})$ 的元素排列成为

$$s_{11},\ \sqrt{2}\,s_{12},\ \cdots,\ \sqrt{2}\,s_{1n},\ s_{22},\ \sqrt{2}\,s_{23},\ \cdots,\ \sqrt{2}\,s_{2n},\ \cdots,\ s_{n-1,n-1},\ \sqrt{2}\,s_{n-1,n},\ s_{nn},$$

这看成为一个 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 維的矢量,用 s 代表. 并將对应于 T 的矢量写为 t. 如此則当 S 經过 (6.1.1) 而变为 T 的时候, s 也經过一綫性变換而变为 t. 这一綫性变换的方陣是 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 行列的,并且我們知道它就是 $U^{[2]}$.

再从矢量 s 做出 $s^{[f]}$, 則 $s^{[f]}$ 是一个

$$\frac{\left(\frac{1}{2}n(n+1)+f-1\right)!}{f!\left(\frac{1}{2}n(n-1)\right)!}$$

維的矢量,其上所进行的綫性变形的方陣也就是

$$(U^{[2]})^{[f]}. \tag{6.1.2}$$

$s^{[f]}$ 中的支量是 s_{ij} 的 f 次齐次式. 任一 f 次齐次式可以表成为 $s^{[f]}$ 的支量的綫性組合,且諸支量間无任何綫性关系.

定理 1.5.2 及定理 1.4.2 說明了羣表示可以分解为如次的不可分解的表示的直和, 也說明了 s_{ij} 的 f 次齐次多項式所张的空間可以分解为以下的一些子空間的直和,其維数各为 $N(2f_1,\cdots,2f_n)$, $f_1+\cdots+f_n=f$. 张此子空間的支量命之为

$$\varphi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(S),\quad i=1,2,\cdots,N(2f_1,\cdots,2f_n). \tag{6.1.3}$$

当 S 經 (6.1.1) 而变为 T 时, (6.1.3) 經 $A_{2f_1,\cdots,2f_n}(U)$ 而变为 $\varphi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(T)$. (6.1.3) 所成的函数系在 $\mathfrak{C}_{II}$ 上是正交的,即

$$\int_{\mathfrak{C}_{II}} \varphi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(S)\,\overline{\varphi^{(j)}_{g_1,\cdots,g_n}(S)}\,\dot{S} = \delta_{ij}\,\delta_{f,g}\,\beta_f,$$

此处积分元素已在 § 3.5 中定义．命

$$\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(S)=\frac{\varphi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(S)}{\sqrt{\rho_{f_1,\cdots,f_n}}},$$

則 $\{\psi^{(i)}_f(S)\}$ 是 $\mathfrak{C}_{II}$ 上的正交正常系．

§ **6.2. 核的在子空間中的射影**

今往討論函数

$$\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S\bar{T})=\sum_i \psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(S)\,\overline{\psi^{(i)}_{f_1,\cdots,f_n}(T)}. \tag{6.2.1}$$

首先有

$$\int_{\mathfrak{C}_{II}}\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\bar{S})\,\dot{S}=N(2f_1,\cdots,2f_n). \tag{6.2.2}$$

由于 $\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\bar{S})$ 与 S 并无关系，因此得出

$$\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\bar{S})=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II})}N(2f_1,\cdots,2f_n).$$

$\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\bar{S})$ 虽然如此簡单，但是具体算出 (6.2.1) 并不簡单．現在把这运算敍述如下：先定义 $(f_1,\cdots,f_n)$ 的次序． 若 $f>g$，即 $(f_1,\cdots,f_n)>(g_1,\cdots,g_n)$，其意义为 $f_1=g_1,\cdots,f_{i-1}=g_{i-1}$，$f_i>g_i$，如此把所有的表示都可以依次序排列出来，由 (6.1.1) 可知

$$A_{f_1,\cdots,f_n}(T)=A_{f_1,\cdots,f_n}(U)\,A_{f_1,\cdots,f_n}(S)\,A_{f_1,\cdots,f_n}(U'). \tag{6.2.3}$$

由 $A_{f_1,\cdots,f_n}(S)$ 的元素所张开的綫性空間命之为 L．显然当 S 变为 T 时，L 变为其自己，即 L 是一不变子空間．这一不变子空間必能表成对应于 $A_{2g_1,\cdots,2g_n}(X)$ 的子空間的直和．从具体的性質极易看到 $(2g_1,\cdots,2g_n)\leqslant(2f_1,\cdots,2f_n)$，并且等号情形一定出現．

命

$$\sigma(A_{f_1,\cdots,f_n}(S)\,A_{f_1,\cdots,f_n}(\bar{T}))=\sigma(A_{f_1,\cdots,f_n}(S\bar{T})),$$

則当 S 及 T 各换以 $S_1=USU'$ 及 $T_1=UTU'$ 时，此式不变，即上式等于

$$\chi_{f_1,\cdots,f_n}(S\bar{T}).$$

由以上說明可見

$$\chi_{f_1,\cdots,f_n}(S\bar{T})=\sum_{g\leqslant f}c_{f,g}\,\Psi_{g_1,\cdots,g_n}(S,\bar{T}), \tag{6.2.4}$$

并且 $c_{f,f}\neq 0$．这一綫性关系显然是可以反轉过来的，即

$$\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\bar{T})=\sum_{g\leqslant f}d_{f,g}\,\chi_{g_1,\cdots,g_n}(S\bar{T}), \tag{6.2.5}$$

所以今后可簡书为

$$\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S,\bar{T})=\Psi_{f_1,\cdots,f_n}(S\bar{T}).$$

今往給与一个有效的办法算出 (6.2.5) 的系数来． 由于 $c_{f,g}$ 与 $d_{f,g}$ 仅当 $g\leqslant f$ 时有定义，今定义当 $f<g$ 时，$c_{f,g}=g_{f,g}=0$．由于指标 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ 已經排好，今可以把 f 看成为一个单碼，即依序定义 $f=1,2,3,\cdots$．此即謂方陣

$$C=(c_{f,g})_{1\leqslant f,g\leqslant k} \quad 及 \quad D=(d_{f,g})_{1\leqslant f,g\leqslant k}$$

皆为非奇异的三角形方陣.

今研究积分

$$\int_S\int_T \Psi_f(S\bar{T})\,\chi_g(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}.$$

先由 (6.2.4) 再由 (6.2.1) 此积分等于

$$\sum_{h\leqslant g} c_{g,h}\int_S\int_T \Psi_f(S\bar{T})\,\Psi_h(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}$$

$$=\sum_{h\leqslant g} c_{g,h}\sum_i\sum_j\int_S\int_T \psi_f^{(i)}(S)\,\overline{\psi_f^{(i)}(T)}\,\psi_h^{(j)}(T)\,\overline{\psi_h^{(j)}(S)}\,\dot{S}\dot{T}$$

$$=\sum_{h\leqslant g}\sum_i\sum_j c_{g,h}\,\delta_{ij}\,\delta_{f,h}=N\sum_{h\leqslant g} c_{g,h}\,\delta_{f,h}.$$

即得当 $g<f$ 时, 我們有

$$\int_S\int_T \Psi_f(S\bar{T})\,\chi_g(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}=0 \tag{6.2.6}$$

及

$$\int_S\int_T \Psi_f(S\bar{T})\,\chi_f(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}=N\,c_{f,f}\neq 0. \tag{6.2.7}$$

命

$$\beta_{f,g}=\int_S\int_T \chi_f(S\bar{T})\,\chi_g(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}. \tag{6.2.8}$$

由 (6.2.6), (6.2.7), (6.2.5) 及 (6.2.8) 可知

$$\sum_{h\leqslant f} d_{f,h}\,\beta_{h,g}=0, \quad 若 \quad g<f \tag{6.2.9}$$

及

$$\sum_{h\leqslant f} d_{f,h}\,\beta_{h,f}=N\,c_{f,f}. \tag{6.2.10}$$

显然,对任一 k 方陣, $B=(\beta_{h,f})_{1\leqslant h,f\leqslant k}$ 是定正的. 方程 (6.2.9) 及 (6.2.10) 可以用方陣符号写出如下:

$$DB=\begin{pmatrix} N_1 c_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & N_2 c_{2,2} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_k c_{k,k} \end{pmatrix}=K,$$

即 $d_{f,g}$ 可以用 $\beta_{f,g}$ 及 K 之元素表出来. 但 K 中的元素并不全知,因此我們必須另想办法. 把方程組 (6.2.10) 变为另一方程組且用遞归法解出 $d_{f,g}$, 求解时将用到 $\beta_{f,g}$ 及其他一些易于算出的常数,

命

$$\alpha_f = \int_S \chi_f(S\bar{S})\,\dot{S}. \tag{6.2.11}$$

在 (6.2.5) 中命 $S=T$ 且对 S 积分可知

$$\sum_{g\leqslant f} d_{f,g}\,\alpha_g = N\,(=N\,(2f_1,\cdots,2f_n)). \tag{6.2.12}$$

当 $f=1$ 时,显然有 $d_{1,1}=N_1/\alpha_1$. 假定当 $f\leqslant k-1$ 时 $d_{1,g}\,(g=1,\cdots,f)$ 已由 $d_{f,g}$ 及 α_f 表出,今往研究 $f=k$ 的情形. 由方程 (6.2.9) 及 (6.2.12) 我們能算出以下的方陣关系:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{f_1} & d_{f_2} & d_{f_3} & \cdots & d_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \cdots, & \beta_{1,f-1}, & \alpha_1 \\ \beta_{21}, & \beta_{22}, & \cdots, & \beta_{2,f-1}, & \alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{f,1}, & \beta_{f,2}, & \cdots, & \beta_{f,f-1}, & \alpha_f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}\beta_{11}, & *, & \cdots, & * \\ 0, & d_{11}\beta_{12}+d_{22}\beta_{22}, & \cdots, & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \cdots, & N \end{pmatrix}. \tag{6.2.13}$$

右边的三角方程是非奇异的,蓋由 (6.2.10) 可知其对角綫上的元素皆不等于 0. 因为 D 是 C 的逆方陣,所以

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \cdots, & \beta_{1,f-1}, & \alpha_1 \\ \beta_{21}, & \beta_{22}, & \cdots, & \beta_{2,f-1}, & \alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{f,1}, & \beta_{f,2}, & \cdots, & \beta_{f,f-1}, & \alpha_f \end{pmatrix}$$

也是可逆的. 故

$$(d_{f,1}, d_{f,2}, \cdots, d_{f,f}) = (0,\cdots,0,N)\,\beta^{-1},$$

卽諸 $d_{f,1},\cdots,d_{f,f}$ 都可以用 $\beta_{f,g}$ 及 d_f 表出来. 于是剩下的問題在于算出 $\beta_{f,g}$ 及 α_f 的数值.

任一酉对称方陣 S 可以表成为 $S=UU'$, 此处 U 是酉方陣. 命 $T=UWU'$, 由于

$$\chi_{f_1,\cdots,f_n}(S\bar{T}) = \chi_{f_1,\cdots,f_n}(UW\bar{U}') = \chi_{f_1,\cdots,f_n}(W),$$

可得

$$\beta_{f,g} = \int_{\mathfrak{C}_{II}} \dot{S} \int_{\mathfrak{C}_{II}} \chi_g(W)\,\overline{\chi_f(W)}\,\dot{W}.$$

用 (3.5.19) 可以算出

$$\beta_{f,g} = V(\mathfrak{C}_{II})\,C \underset{2\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant0}{\int\cdots\int} \chi_g([e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]) \times$$

$$\times\,\overline{\chi_f([e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}])} \prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n} |e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}|\,d\theta_1\cdots d\theta_n, \tag{6.2.13'}$$

其中

$$C = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \int_{\{0\}} \{\dot{0}\}.$$

由于

$$e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu} = 2\, i \sin \frac{1}{2}(\theta_\nu - \theta_\mu)\, e^{\frac{i}{2}(\theta_\nu + \theta_\mu)}, \tag{6.2.14}$$

可知

$$\beta_{f,g} = V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}})\, C\, 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_{2\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant 0} \cdots \int \chi_g([e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}]) \times$$

$$\times\, \chi_f([e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}]) \prod_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} \sin \frac{1}{2}(\theta_\nu - \theta_\mu)\, d\theta_1 \cdots d\theta_n. \tag{6.2.15}$$

以下的計算方法在实际运算时較为方便．由 (6.2.14) 可知

$$|\, e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu} \,| = 2 \sin \frac{1}{2}(\theta_\nu - \theta_\mu)\, \mathrm{sgn}\, (\theta_\nu - \theta_\mu)$$

$$= -\, i(e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu})\, e^{-\frac{1}{2}i(\theta_\nu + \theta_\mu)}\, \mathrm{sgn}\, (\theta_\nu - \theta_\mu);$$

$$\prod_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} |\, e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu} \,| = (-\, i)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} (e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu})\, e^{-\frac{1}{2}i(n-1)(\theta_1 + \cdots + \theta_n)}\, \mathrm{sgn} \prod_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} (\theta_\nu - \theta_\mu).$$

由此得出

$$\beta_{f,g} = V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}})\, C(-\, i)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \int_{2\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant 0} \cdots \int \chi_g([e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}]) \times$$

$$\times\, \chi_f([e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}]) \prod_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} (e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu})\, e^{-\frac{i}{2}(n-1)(\theta_1 + \cdots + \theta_n)}\, d\theta_1 \cdots d\theta_n. \tag{6.2.16}$$

由于

$$\chi_g([e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}]) \prod_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} (e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu})$$

是一形如 $M_{g_1, \cdots, g_n}([e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}])$ 的式子，而 $\chi_{f_1, \cdots, f_n}([e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{-i\theta_n}])$ 可由 S-函数表出，因之对任一具体情形都可以計算得出来．但美中不足的是并未算出 $\beta_{f,g}$ 的一般表示法．

§6.3. $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 的正常正交函数系

由上节的結果可知

$$\left\{\psi^{(i)}_{f_1, \cdots, f_n}(Z)\right\}$$

也是 $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 域的正交完整系，因此問題在于算出

$$\rho_f = \int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}} |\, \psi^{(i)}_{f_1, \cdots, f_n}(Z)\, |^2 \dot{Z}.$$

已知此 ρ_f 与 i 无关,因此

$$\rho_f N_{2f_1,\cdots,2f_n} = \int_{\mathfrak{R}_{II}} \Psi_{f_1,\cdots,f_n}(Z\bar{Z}')\dot{Z}.$$

由于 (6.2.5),因之我們的問題在于算出

$$\int_{\mathfrak{R}_{II}} \chi_{f_1,\cdots,f_n}(Z\bar{Z}')\dot{Z}.$$

由 (3.5.2) 可知此积分等于

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_U \dot{U} \int\cdots\int_{0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant 1} \prod_{j<k} |\lambda_j^2 - \lambda_k^2|\, \chi_{f_1,\cdots,f_n}([\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2])\lambda_1\cdots\lambda_n\, d\lambda_1\cdots d\lambda_n$$

$$= 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \varpi_n' \int\cdots\int_{0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant 1} \begin{vmatrix} \lambda_1^{2l_1} \cdots \lambda_1^{2l_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n^{2l_1} \cdots \lambda_n^{2l_n} \end{vmatrix} \lambda_1\cdots\lambda_n\, d\lambda_1\cdots d\lambda_n$$

$$= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \varpi_n' \int_0^1\cdots\int_0^1 \sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta_{i_1,\cdots,i_n} \tau_1^{2l_{i_1}+1} \tau_2^{2l_{i_1}+2l_{i_2}+3}\cdots\tau_n^{2l_{i_1}+\cdots+2l_{i_n}+2n-1}\, d\tau_1\cdots d\tau_n$$

$$= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \varpi_n' \int_0^1\cdots\int_0^1 \sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta_{i_1,\cdots,i_n} \lambda_1^{l_{i_1}} \lambda_2^{l_{i_1}+l_{i_2}+1}\cdots\lambda_n^{l_{i_1}+\cdots+l_{i_n}+n-1}\, d\lambda_1\cdots d\lambda_n$$

$$= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \varpi_n' \sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta_{i_1,\cdots,i_n} \frac{1}{l_{i_1}+1}\cdot\frac{1}{l_{i_1}+l_{i_2}+2}\cdots\frac{1}{l_{i_1}+\cdots+l_{i_n}+n}$$

$$= 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{D(l_1, \cdots, l_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(l_i+l_j+2)} \varpi_n'.$$

这里应用了以下的

引理.

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta_{i_1,\cdots,i_n} \frac{1}{l_{i_1}} \frac{1}{l_{i_1}+l_{i_2}} \cdots \frac{1}{l_{i_1}+\cdots+l_{i_n}} = \frac{2^n D(l_1, \cdots, l_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(l_i+l_j)}.$$

证: 当 $n=2$ 时,显然为真. 今假定当 $n-1$ 时此定理眞实,上式等于

$$\frac{2^{n-1}}{l_1+l_2+\cdots+l_n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{D(l_1, \cdots, l_{i-1}, l_{i+1}, \cdots, l_n)}{\prod\limits_{1\leqslant j<k\leqslant n}(l_j+l_k)} \prod_{i=1}^n (l_i+l_j)$$

$$= \frac{2^{n-1}}{\sigma_1 \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n}(l_j+l_k)} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} D(l_1, \cdots, l_{i-1}, l_{j+1}, \cdots, l_n)(l_i^n + \sigma_1 l_i^{n-1} +$$

$$+ \sigma_2 l_i^{n-2} + \cdots).$$

此处 σ_ν 等于 $l_1, \cdots, l_n$ 的 ν 次基本对称函数. 由于

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}D(l_1, \cdots, l_{i-1}, l_{i+1}, \cdots, l_n)\, l_i^n = \sigma_1 D(l_1, \cdots, l_n),$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}D(l_1, \cdots, l_{i-1}, l_{i+1}, \cdots, l_n)\, l_i^{n-1} = D(l_1, \cdots, l_n),$$

及其他諸項等于 0, 故得定理.

§ 6.4. 斜对称空間的特征流形

(3.6.2) 及 (3.6.16) 所表的流形作为 $\mathfrak{R}_{\rm III}$ 的流形 $\mathfrak{C}_{\rm III}$,其上的体积元素已由 §3.6 定义. 研究变形

$$L = UKU', \tag{6.4.1}$$

此处 K 及 L 是斜对称方陣. 将 $K = (k_{ij})$ 的元素排成为

$$k_{12}, \cdots, k_{1n}, k_{23}, \cdots, k_{2n}, \cdots, k_{n-1,n},$$

这看成一个$\frac{1}{2}n(n-1)$維的矢量,用 k 代表,将对应于 L 的矢量写成为 l,则当 K 經 (6.4.1) 而变为 L 时, k 經 $U^{(2)}$ 而变为 l.

矢量 $k^{[f]}$ 是一个

$$\frac{\left(\frac{1}{2}n(n-1)+f-1\right)!}{f!\left(\frac{1}{2}n(n-1)-1\right)!}$$

維的矢量,其上所进行的綫性变形的方陣也就是

$$(U^{(2)})^{[f]}. \tag{6.4.2}$$

由定理 1.5.3 及定理 1.4.3 可知, $k^{[f]}$ 所在的空間分为以下的一些子空間的直和,其維数各为 $N(f_1, f_1, f_2, f_2, \cdots)$. 张此子空間的支量命之为

$$\psi^{(i)}_{f_1, \cdots, f[\frac{1}{2}n]}(K), \qquad i = 1, 2, \cdots, N(f_1, f_1, f_2, f_2, \cdots).$$

我們不难証明

$$\int_{\mathfrak{R}_{\rm III}} \psi_f^{(i)}(Z)\,\overline{\psi_g^{(j)}(Z)}\,\dot{Z} = \begin{cases} 0, & 若\ (f) \neq (g)\ 或\ i \neq j; \\ \rho_f, & 若\ (f) = (g)\ 及\ i = j \end{cases}$$

及

$$\int_{\mathfrak{C}_{\rm III}} \psi_f^{(i)}(K)\,\overline{\psi_g^{(j)}(K)}\,\dot{K} = \begin{cases} 0, & 若\ (f) \neq (g)\ 或\ i \neq j; \\ \beta_f, & 若\ (f) = (g)\ 及\ i = j. \end{cases}$$

第 七 章

超球双曲空間的調和分析

§ 7.1. 超球多項式

为了讀者易于了解起見，現在从头敍述超球多項式及球調和分析的若干知識．超球多項式的定义是：当 $\lambda > -\frac{1}{2}$，

$$P_r^{(\lambda)}(\xi) = \sum_{0 \leq l \leq \frac{1}{2}r} (-1)^l \frac{\Gamma(r-l+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\, l!\, (r-2l)!} (2\xi)^{r-2l}. \tag{7.1.1}$$

用級数展开法，我們可以証明

$$(1-2\xi w + w^2)^{-\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{(\lambda)}(\xi)\, w^m. \tag{7.1.2}$$

我們并将用及关于超球多項式的 Rodrique 公式

$$(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_m^{(\lambda)}(\xi) = \frac{(-2)^m}{m!} \frac{\Gamma(m+\lambda)\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2m+2\lambda)} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}. \tag{7.1.3}$$

关于这一公式的証明，讀者可依以下的提示自己补出．先由 (7.1.1) 証明 $\frac{d}{d\xi} P_m^{(\lambda)}(\xi) = 2\lambda P_{m-1}^{(\lambda+1)}(\xi)$，再用归納法．

假定 $f(\xi)$ 是一个在 $[+1, -1]$ 之間且有 m 次微商的函数．由 (7.1.3) 可知

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)\, P_m^{(\lambda)}(\xi)\, (1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, d\xi$$

$$= \frac{(-2)^m\, \Gamma(m+\lambda)\, \Gamma(m+2\lambda)}{m!\, \Gamma(\lambda)\, \Gamma(2m+2\lambda)} \int_{-1}^{+1} f(\xi) \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\, d\xi. \tag{7.1.4}$$

用部分积分法可知

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\, d\xi$$

$$= f(\xi) \left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1} (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} f'(\xi) \left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1} (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\, d\xi.$$

由于 $\lambda > -\frac{1}{2}$，故

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1} (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^{+1} = 0.$$

因得

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi = -\int_{-1}^{+1} f'(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi.$$

續行此法，最后得出

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)\,P_m^{(\lambda)}(\xi)\,(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi$$
$$=\frac{2^m\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{m!\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)}\int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m f(\xi)\,d\xi. \tag{7.1.5}$$

如果 $f(\xi)$ 是一 m 次多項式，其最高方次的系数等于 a，則得

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)\,P_m^{(\lambda)}(\xi)\,(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi$$
$$=\frac{2^m\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)}\,a\int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi$$
$$=\frac{2^m\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)\,\Gamma\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)\,\Gamma(m+\lambda+1)}\,a. \tag{7.1.6}$$

特别取 $f(\xi)=P_l^{(\lambda)}(\xi)$ 并与 (7.1.5) 联合可得

$$\int_{-1}^{+1} P_l^{(\lambda)}(\xi)\,P_m^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi$$
$$=\begin{cases}0, & \text{若 } l\neq m,\\ \dfrac{2^{1-2\lambda}\,\pi\Gamma(m+2\lambda)}{(\Gamma(\lambda))^2\,(m+\lambda)\,\Gamma(m+1)}, & \text{若 } l=m.\end{cases} \tag{7.1.7}$$

又在 (7.1.5) 中取 $f(\xi)=\xi^l$，則当 $l\geqslant m$ 时

$$\int_{-1}^{+1}\xi^l P_m^{(\lambda)}(\xi)\,(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi$$
$$=\binom{l}{m}\frac{2^m\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)}\int_{-1}^{+1}\xi^{l-m}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi. \tag{7.1.8}$$

当 $l-m$ 为奇数时，此积分之值等于零. 若 $l-m=2k$，則由于

$$\int_{-1}^{+1}\xi^{l-m}\,(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi=\int_0^{+1}\xi^{k-\frac{1}{2}}(1-\xi)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi$$
$$=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+m+\lambda+1)},$$

得出

$$\int_{-1}^{+1}\xi^l P_m^{(\lambda)}(\xi)\,(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi$$
$$=\begin{cases}0, & \text{若 } l<m \text{ 或 } l-m \text{ 是奇数},\\ \dfrac{\pi}{2^{l+2\lambda-1}}\,\dfrac{l!}{k!\,(l-2k)!}\,\dfrac{\Gamma(l-2k+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(l-k+\lambda+1)}, & \text{若 } l=m+2k.\end{cases} \tag{7.1.9}$$

任一 m 次多項式 $f(\xi)$ 一定可以表成为

$$f(\xi)=\sum_{l=0}^{m}a_lP_l^{(\lambda)}(\xi)$$

的形式. 乘以 $P_l^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, 且由 $+1$ 到 -1 求积分可得

$$a_l=\frac{2^{2\lambda-1}(\Gamma(\lambda))^2(l+\lambda)\Gamma(l+1)}{\pi\Gamma(l+2\lambda)}\int_{-1}^{+1}f(\xi)P_l^{(\lambda)}(\xi)(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi.$$

由此显然推出

定理 7.1.1. 如果任一 m 次多項式 $f(\xi)$ 适合于 $a_l=0\ (0\leqslant l\leqslant m-1)$, 則 $f(\xi)$ 与 $P_m^{(\lambda)}(\xi)$ 仅相差一常数因子.

根据这一表法及 (7.1.9) 可得

$$\xi^m=\frac{m!\Gamma(\lambda)}{2^m}\sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}m]}\frac{m-2k+\lambda}{k!\Gamma(m-k+\lambda+1)}P_{m-2k}^{(\lambda)}(\xi). \tag{7.1.10}$$

在下文中我們还需要以下的公式:

当 $\nu>\lambda$ 时

$$P_m^{(\nu)}(\xi)=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}m]}c_kP_{m-2k}^{(\lambda)}(\xi), \tag{7.1.11}$$

此处

$$c_k=\frac{m-2k+\lambda}{k!}\frac{\Gamma(k+\nu-\lambda)}{\Gamma(\nu-\lambda)}\frac{\Gamma(m+\nu-k)}{\Gamma(m+\lambda+1-k)}. \tag{7.1.12}$$

这公式的証明如次: 由 (7.1.1) 及 (7.1.10) 可知

$$P_m^{(\nu)}(\xi)=\sum_{s=0}^{[\frac{1}{2}m]}(-1)^s\frac{\Gamma(\nu+m-s)}{\Gamma(\nu)\Gamma(s+1)\Gamma(m-2s+1)}(2\xi)^{m-2s}$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=0}^{[\frac{1}{2}m]}(-1)^s\frac{\Gamma(\nu+m-s)}{\Gamma(s+1)}\sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}m]-s}\frac{m-2s-2k+\lambda}{k!\Gamma(m-2s-k+\lambda+1)}P_{m-2s-2k}^{(\lambda)}(\xi)$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)}\sum_{t=0}^{[\frac{1}{2}m]}c_tP_{m-2t}^{(\lambda)}(\xi),$$

此处

$$c_t=\sum_{s+k=t}(-1)^s\frac{\Gamma(\nu+m-s)(m-2s-2k+\lambda)}{s!k!\Gamma(m-2s-k+\lambda+1)}$$

$$=\frac{m-2t+\lambda}{t!}\sum_{s=0}^{t}(-1)^s\binom{t}{s}\frac{\Gamma(\nu+m-s)}{\Gamma(m-t-s+\lambda+1)}$$

$$=\frac{(m-2t+\lambda)\Gamma(t+\nu-\lambda)\Gamma(\nu+m-t)}{t!\Gamma(\nu-\lambda)\Gamma(m-t+\lambda+1)}.$$

(注意,此处用了以下的公式: 命 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$, $\Delta^q f(x)=\Delta^{q-1}(\Delta f(x))$, 而 $\Delta^q f(x)=\sum_{l=0}^{q}(-1)^l\binom{q}{l}f(x+q-l)$. 由于 $\Delta\frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)}=(\alpha-\beta)\frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x+1)}$ 可知当 $\alpha>\beta$ 时, $\Delta^q\frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)}=\frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha-\beta-q+1)}\frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x+q)}$.)

§ 7.2. 球面上的調和分析

命 γ 表示 n 維实数空間的单位超球面(或簡称球面),即 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 适合于

$$xx'=1. \tag{7.2.1}$$

习知这球面有次之襲变数表示法

$$x_r=\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{r-1}\cos\theta_r,\qquad 1\leqslant r\leqslant n-1,$$
$$x_n=\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},$$

其中 θ 所变化的范围是

$$0\leqslant\theta_r\leqslant\pi\qquad(1\leqslant r\leqslant n-2),\qquad 0\leqslant\theta_{n-1}\leqslant 2\pi.$$

在这种表法之下,超球的表面积元素是

$$\dot{x}=|\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}|\,d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}. \tag{7.2.2}$$

今往求出球面上的一个正交正常系.

命 u 表一实矢量,做这矢量 u 的 f 次对称冪 $u^{[f]}$, 卽由支量

$$\sqrt{\frac{f!}{j_1!\cdots j_n!}}u_1^{j_1}\cdots u_n^{j_n},\qquad j_1+\cdots+j_n=f$$

所成的矢量,这矢量的維数等于

$$N_f=\frac{1}{f!}n(n+1)\cdots(n+f-1).$$

易証

$$u^{[f]}v^{[f]\prime}=(uv')^f,$$

故

$$x^{[f]}x^{[f]\prime}=1.$$

今研究实正交变换

$$v=uT,\qquad TT'=I. \tag{7.2.3}$$

由此得出

$$v^{[f]}=u^{[f]}T^{[f]}.$$

今往分解 $u^{[f]}$ 为不可再分的子空間. 显然

$$(uu')\,u^{[f-2]}$$

是 $u^{[f]}$ 的一个不变子空間,它的維数等于 N_{f-2}. 因之,可以証明 $T^{[f]}$ 可以分解为以下的直和

$$T_f\dotplus T_{f-2}\dotplus\cdots\dotplus T_{f-2[\frac{1}{2}f]}. \tag{7.2.4}$$

习知这些 T_r 是不可分解的 (Murnaghan [1], 242 頁), 并且是互不相似的, 此处 T_r 是 N_r-N_{r-2} 行列的方陣,不妨假定他們都是正交方陣. 命 T_{f-2l} 所行施的子空間的矢量 $V_{f-2l}(u)$ 的支量是

$$(uu')^l \varphi_{f-2l}^{(i)}(u), \qquad i = 1, 2, \cdots, N_{f-2l} - N_{f-2(l+1)}.$$

用以上屢用的方法 (Schur 引理) 可以証明

定理 7.2.1. 若 $r \neq s$ 或 $i \neq j$, 则

$$\int_\gamma \varphi_r^{(i)}(x)\,\varphi_r^{(j)}(x)\,\dot{x} = 0 \tag{7.2.5}$$

及

$$\int_\gamma |\varphi_r^{(i)}(x)|^2\,\dot{x} = \beta_r, \tag{7.2.6}$$

此 β_r 与 i 无关.

命

$$\psi_r^{(i)}(u) = \varphi_r^{(i)}(u)/\sqrt{\beta_r},$$

则这些函数在球面上成一个正交正常函数系.

§ 7.3. 核在子空間的投影

現在我們研究函数

$$\Phi_r(u, v) = V_r(u)\,V_r(v)' = \sum_{i=0}^{m} \psi_r^{(i)}(u)\,\psi_r^{(i)}(v), \quad m = N_r - N_{r-2}. \tag{7.3.1}$$

显然对任一正交方陣 T 常有

$$\begin{aligned}\Phi_r(uT, vT) &= V_r(uT)\,V_r(vT)' = V_r(u)\,T_r T_r' V_r(v)' \\ &= V_r(u)\,V_r(v)' = \Phi_r(u, v),\end{aligned}$$

故 $\Phi_r(u, v)$ 是正交羣下的一个不变量. 由不变量論中的定理 (Weyl [2], 53 頁) 可知 $\Phi_r(u, v)$ 是 uu', vv' 及 uv' 的函数, 又 $\Phi_r(u,v)$ 是 u 中元素的 r 次齐次式及 v 中元素的 r 次齐次式, 因此, $\Phi_r(u, v)$ 可以写成为

$$\Phi_r(u, v) = \sum_{0 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}r} c_{l,r}(uv')^{r-2l}(uu'vv')^l.$$

如 $u = x$, $v = y$ 皆在球上, 则得

$$\Phi_r(x, y) = \sum_{0 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}r} c_{l,r}(xy')^{r-2l};$$

命之为

$$\Phi_r(x, y) = Q_r(\xi), \qquad \xi = xy', \tag{7.3.2}$$

此 ξ 乃 x 及 y 二点向中心联綫所得的交角的余弦.

由公式 (7.3.1) 及 (7.2.5) 可知

$$\int_\gamma\int_\gamma \Phi_r(x, y)\,\Phi_s(x, y)\,\dot{x}\dot{y} = \begin{cases} 0, & \text{若 } s \neq r, \\ N_r - N_{r-2}, & \text{若 } s = r. \end{cases} \tag{7.3.3}$$

将 (7.3.2) 代入 (7.3.3) 可知

$$\int_\gamma\int_\gamma Q_r(xy')\,Q_s(xy')\,\dot{x}\dot{y} = \begin{cases} 0, & \text{若 } s \neq r, \\ N_r - N_{r-2}, & \text{若 } s = r. \end{cases} \tag{7.3.4}$$

固定了 x. 有一行列式是 1 的正交方陣 T 使 $xT=(1,0,\cdots,0)$ 对 y 积分并施行变换 $w=yT$, 則得积分 (7.3.4) 等于

$$\int_\Gamma\int_\Gamma Q_r(w_1)\,Q_s(w_1)\,\dot w\dot x=\varpi\int_\Gamma Q_r(w_1)\,Q_s(w_1)\,\dot w,$$

此处 ϖ 等于 (7.2.1) 的总面积. 行变换

$$w_1=\xi,\qquad w_i=(1-\xi^2)^{\frac12}\xi_i,\qquad 2\leqslant i\leqslant n,$$

則得积分 (7.3.4) 等于

$$\begin{aligned}\varpi\int_\Gamma Q_r(w_1)\,Q_s(w_1)\,\dot w&=2\varpi\underset{w_1^2+\cdots+w_{n-1}^2\leqslant 1}{\int\cdots\int}Q_r(w_1)Q_s(w_1)\frac{dw_1\cdots dw_{n-1}}{\sqrt{1-w_1^2-\cdots-w_{n-1}^2}}\\&=2\varpi\int_{-1}^{+1}Q_r(w_1)\,Q_s(w_1)dw_1\underset{w_2^2+\cdots+w_{n-1}^2\leqslant 1-w_1^2}{\int\cdots\int}\frac{dw_2\cdots dw_{n-1}}{\sqrt{1-w_1^2-\cdots-w_{n-1}^2}}\\&=2\varpi\int_{-1}^{+1}Q_r(\xi_1)\,Q_s(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac12(n-3)}\,d\xi\underset{\xi_2^2+\cdots+\xi_{n-1}^2\leqslant 1}{\int\cdots\int}\frac{d\xi_2\cdots d\xi_{n-1}}{\sqrt{1-\xi_2^2-\cdots-\xi_{n-1}^2}}\\&=2\varpi\varpi'\int_{-1}^{+1}Q_r(\xi)\,Q_s(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac12(n-3)}\,d\xi,\end{aligned}\tag{7.3.5}$$

此处 ϖ' 是 $\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2=1$ 的总面积. 由 (7.3.4) 及 (7.3.5) 可知

$$\int_{-1}^{+1}Q_r(\xi)\,Q_s(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac12(n-3)}\,d\xi=\begin{cases}0, & 若\ r\neq s,\\ (N_r-N_{r-2})/\varpi\varpi', & 若\ r=s.\end{cases}\tag{7.3.6}$$

由定理 7.1.1 可知

$$Q_r(\xi)=cP_r^{(\frac12 n-1)}(\xi).\tag{7.3.7}$$

今往定出 c 来. 由 (7.3.6) 及 (7.1.7) 可知

$$\begin{aligned}\frac{N_r-N_{r-2}}{\varpi\varpi'}&=c^2\int_{-1}^{+1}(P_r^{(\frac12 n-1)}(\xi))^2\,(1-\xi^2)^{\frac12(n-3)}\,d\xi\\&=c^2\frac{2^{3-n}\pi\,\Gamma(r+n-2)}{\left(\Gamma\left(\frac12 n-1\right)\right)^2\left(r+\frac12 n-1\right)\Gamma(r+1)}.\end{aligned}$$

解此可得

$$\begin{aligned}c^2=&\frac{\Gamma\left(\frac12 n\right)\Gamma\left(\frac12(n-1)\right)\left(\Gamma\left(\frac12 n-1\right)\right)^2\left(r+\frac12 n-1\right)r!}{4\pi^{\frac12 n+\frac12(n-1)}\cdot 2^{3-n}\pi\Gamma(r+n-2)}\times\\&\times\left(\binom{n+r-1}{r}-\binom{n+r-3}{r-2}\right)=2^{-2}\pi^{-n}\Gamma\left(\frac12 n-1\right)^2\left(r+\frac12 n-1\right)^2,\end{aligned}$$

即得

$$c=\frac{1}{2\pi^{\frac12 n}}\left(r+\frac12 n-1\right)\Gamma\left(\frac12 n-1\right).\tag{7.3.8}$$

由此得出

$$\Phi_r(u, v)=\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}n}}\left(r+\frac{1}{2}n-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)(uu'\overline{vv'})^{\frac{1}{2}r}P_r^{(\frac{1}{2}n-1)}\left(\frac{u\overline{v}'}{\sqrt{uu'\overline{vv'}}}\right). \quad (7.3.9)$$

§ 7.4. 特征流形上的正交系

$\Re_{IV}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_{IV}$ 是由以下的点

$$u=e^{i\theta}x, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \qquad (7.4.1)$$

所組成的，此处 x 是 n 維空間的实矢量之适合于 (7.2.1) 者．这流形上的体积元素是 $\dot{u}=d\theta\cdot\dot{x}$，此 $\dot{x}$ 的定义見 § 7.2.

作 $u^{[f]}$，如 § 7.2 作出 $\psi_r^{(i)}(u)$．$u^{[f]}$ 分为以下的子空間

$$\{(uu')^l\psi_{f-2l}^{(i)}(u)\}, \qquad i=1,\cdots,N_{f-2l}-N_{f-2(l+1)}$$

的直和.

由一般性的定理立刻得出

定理 7.4.1. 若 $f\neq g$ 或 $l\neq k$ 或 $i\neq j$，則有

$$\int_{\mathfrak{C}_{IV}}(uu')^l\psi_{f-2l}^{(i)}(u)\,\overline{(uu')^k}\,\overline{\psi_{g-2k}^{(j)}(u)}\,\dot{u}=0. \qquad (7.4.2)$$

另一方面易証

$$\int_{\mathfrak{C}_{IV}}|uu'|^{2l}\,|\psi_{f-2l}^{(i)}(u)|^2\,\dot{u}=\int_0^\pi d\theta\int_\gamma|\psi_{f-2l}^{(i)}(x)|^2\,\dot{x}=\pi, \qquad (7.4.3)$$

故

$$(uu')^l\psi_{f-2l}^{(i)}(u)/\sqrt{\pi} \qquad (7.4.4)$$

是 $\mathfrak{C}_{IV}$ 上的一个正交正常函数系.

由此及 (7.3.9), (7.1.11), (7.1.2) 也可算出

$$H(z,\overline{u})=\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l<\frac{1}{2}m}\sum_i(zz')^l(\overline{uu'})^l\psi_{m-2l}^{(i)}(z)\overline{\psi_{m-2l}^{(i)}(u)}$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l<\frac{1}{2}m}(zz'\overline{uu'})^l\Phi_{m-2l}(z,\overline{u})$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l<\frac{1}{2}m}\left(m-2l+\frac{n}{2}-1\right)(zz'\overline{uu'})^l(zz'\overline{uu'})^{\frac{m}{2}-l}\times$$

$$\times P_{m-2l}^{(\frac{1}{2}n-1)}\left(\frac{z\overline{u}'}{\sqrt{zz'\overline{uu'}}}\right)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}}\left(\frac{1}{2}n-1\right)\sum_{m=0}^{\infty}(zz'\overline{uu'})^{\frac{m}{2}}P_m^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{z\overline{u}'}{\sqrt{zz'\overline{uu'}}}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}}(1 - 2\,\overline{z\,u'} + z\,z'\overline{u\,u'})^{-\frac{1}{2}n}. \tag{7.4.5}$$

附記. 由于 $u\,u' = e^{2i\theta}$, $\bar{u}'e^{2i\theta} = u'$ 可知

$$1 - 2\,z\,\bar{u}' + z\,z'\,\overline{u\,u'} = \overline{u\,u'}(u\,u' - 2\,z\,\bar{u}'u\,u' + z\,z')$$

$$= \overline{u\,u'}(u\,u' - 2\,z\,u' + z\,z') = \overline{u\,u'}(u - z)(u - z)',$$

因此 Cauchy 公式变为

$$f(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}}\int_0^{\pi}\int_{\gamma}\frac{f(e^{i\theta}x)\,e^{i\theta n}}{((e^{i\theta}x - z)(e^{i\theta}x - z)')^{\frac{1}{2}n}}\,d\theta\,\dot{x}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}}\int_0^{\pi}\int_{\gamma}\frac{f(e^{i\theta}x)}{((x - e^{-i\theta}z)(x - e^{-i\theta}z)')^{\frac{1}{2}n}}\,d\theta\,\dot{x}. \tag{7.4.6}$$

§ 7.5. $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 的正常正交完整系

在 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 中已知

$$\{(z\,z')^l\,\psi^{(i)}_{f-2l}(z)\}$$

是正交完整系,今往算出

$$\int\cdots\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}}|z\,z'|^{2l}\,|\psi^{(i)}_{f-2l}(z)|^2\,\dot{z} = \tau_{l,f-2l},$$

即

$$\int\cdots\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}}|z\,z'|^{2l}\,\Phi_{f-2l}(z,\bar{z})\,\dot{z} = (N_{f-2l} - N_{f-2(l+1)})\,\tau_{l,f-2l}. \tag{7.5.1}$$

如果从积分

$$\int\cdots\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}}(z\,\bar{z}')^t\,|z\,z'|^{2t}\,\dot{z}$$

算起,并不容易. 現在我們另用他法. 从域 $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 的核函数的定义可知

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})}(1 + |z\,z'|^2 - 2\,\bar{z}\,z')^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{[\frac{1}{2}m]}\frac{|z\,z'|^{2l}\,\Phi_{m-2l}(z,\bar{z})}{\tau_{l,m-2l}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{[\frac{1}{2}m]}\frac{|z\,z'|^m\left(m - 2\,l + \frac{n}{2} - 1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}\,\tau_{l,m-2l}}P^{(\frac{1}{2}n-1)}_{m-2l}(\xi)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n - 1\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}}\sum_{m=0}^{\infty}|z\,z'|^m\sum_{l=0}^{[\frac{1}{2}m]}\frac{m - 2l + \frac{n}{2} - 1}{\tau_{l,m-2l}}P^{(\frac{1}{2}n-1)}_{m-2l}(\xi),$$

此处 $\xi = z\,\bar{z}'/|z\,z'|$.

另一方面由 (7.1.2) 可知

$$(1-2\xi w+w^2)^{-\lambda}=\sum_{m=0}^{\infty}P_m^{(\lambda)}(\xi)\,w^m.$$

卽得

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})}(1+|zz'|^2-2z\bar{z}')^{-n}=\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})}\sum_{m=0}^{\infty}|zz'|^m P_m^{(n)}(\xi).$$

比較系数可得

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})}P_m^{(n)}(\xi)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}}\sum_{l=0}^{[\frac{1}{2}m]}\frac{m-2l+\frac{n}{2}-1}{\tau_{l,m-2l}}P_{m-2l}^{(\frac{n}{2}-1)}(\xi).$$

再由 (7.1.11) 可知

$$P_m^{(\nu)}(\xi)=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}m]}c_k P_{m-2k}^{(\lambda)}(\xi),$$

此处

$$c_k=\frac{(m-2k+\lambda)\Gamma(k+\nu-\lambda)\Gamma(m+\nu-k)}{k!\,\Gamma(\nu-\lambda)\Gamma(m-k+\lambda+1)}.$$

因此

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(m-2l+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(m+n-l)}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})\Gamma(n)\,l!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(m-l+\frac{n}{2}\right)}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(m-2l+\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}\tau_{l,m-2l}}.$$

故得

$$\tau_{l,m-2l}=\frac{l!\,\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n-l\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(m+n-l)}V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}). \tag{7.5.2}$$

总之，我們証明了

$$\int\cdots\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{VI}}}|zz'|^{2l}\Phi_{f-2l}(z,\bar{z})\,\dot{z}$$

$$=(N_{f-2l}-N_{f-2(l+1)})\frac{l!\,\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(f+\frac{n}{2}-l\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(f+n-l)}V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}). \tag{7.5.3}$$

由于

$$N_{f-2l}=\frac{(n+f-2l-1)!}{(f-2l)!\,(n-1)!},\qquad V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})=\frac{\pi^n}{2^{n-1}}\frac{1}{n!}$$

及

$$\Phi_{f-2l}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}n}}\left(f-2l+\frac{1}{2}n-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)|zz'|^{f-2l}P_{f-2l}^{(\frac{1}{2}n-1)}\left(\frac{z\bar{z}'}{|zz'|}\right),$$

公式 (7.5.3) 等价于

$$\int_{\Re_{IV}}\cdots\int |zz'|^{2l}P_{f-2l}^{(\frac{1}{2}n-1)}\left(\frac{z\bar{z}'}{|zz'|}\right)\dot{z}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\pi\right)^n\frac{(n+f-2l-3)!}{(f-2l)!(n-3)!}\frac{l!\,\Gamma\left(f+\frac{1}{2}n-l\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(f+n-l)}. \tag{7.5.4}$$

在以下几节中，我們將用直接法来証明 (7.5.4).

§7.6. 化重积分为单积分

命 $z=x+iy$, 域 $\Re_{IV}$ 由以下的公式定义：

$$1 > xx'+yy'+2\sqrt{xx'yy'-(xy')^2}$$

(§2.5). 研究积分

$$I=\int_{\Re_{IV}}\cdots\int |zz'|^f F\left(\frac{z\bar{z}'}{|zz'|}\right)\dot{z}. \tag{7.6.1}$$

对一固定的 x, 作变形

$$y=\sqrt{xx'}\,u,$$

則显然有 $\dot{y}=(xx')^{\frac{1}{2}n}\dot{u}$. 于是积分范围变为

$$1 > xx'(1+uu'+2\sqrt{uu'-(xu'/\sqrt{xx'})^2}).$$

有一行列式为 1 的正交方陣使

$$x\Gamma=(\sqrt{xx'}, 0, \cdots, 0).$$

作变形

$$u\Gamma=(\xi, v),$$

此处 v 是一 $(n-1)$ 維的矢量. 由于

$$z\bar{z}'=xx'+yy'=xx'(1+\xi^2+vv')$$

及

$$\begin{aligned}|zz'|^2 &= (xx'-yy')^2+4xy'^2\\ &= (xx')^2[(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2],\end{aligned}$$

可知

$$I=\int_{1>xx'(1+\xi^2+vv'+2\sqrt{vv'})}\cdots\int (xx')^{f+\frac{1}{2}n}[(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2]^{\frac{1}{2}f}F\left(\frac{1+\xi^2+vv'}{[(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2]^{1/2}}\right)d\xi\,\dot{v}\,\dot{x}.$$

又由于

$$\int_{xx'<A^2}\cdots\int (x\,x')^{f+\frac{n}{2}}\,\dot{x}=\frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\int_0^A r^{n-1}\,r^{2f+n}\,dr=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\frac{A^{2(f+n)}}{f+n},$$

可知

$$I=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\frac{1}{f+n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\Big[(1+\xi^2+v\,v'+2\sqrt{v\,v'})^{-(f+n)}[(1-\xi^2-v\,v')^2+4\,\xi^2]^{\frac{1}{2}f}\times$$

$$\times F\left(\frac{1+\xi^2+v\,v'}{[(1-\xi^2-v\,v')^2+4\,\xi^2]^{1/2}}\right)\Big]\,d\xi\,\dot{v}$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\frac{2^n}{f+n}\int_{\substack{v_2>0,\cdots,v_n>0\\ \xi>0}}\cdots\int\Big[\cdots\Big]\,d\xi\,\dot{v}. \qquad (7.6.2)$$

命 $v\,v'=\eta^2,\ \eta>0,\ v_2=\sqrt{\eta^2-v_3^2-\cdots-v_n^2}$，則

$$dv_2=\frac{\eta\,d\eta}{\sqrt{\eta^2-v_3^2-\cdots-v_n^2}}.$$

故 (7.6.2) 等于

$$I=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}\,2^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)(f+n)}\int_{\substack{v_3>0,\cdots,v_n>0\\ \xi>0,\ \eta>0}}\cdots\int(1+\xi^2+\eta^2+2\eta)^{-(f+n)}[(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\,\xi^2]^{\frac{1}{2}f}\times$$

$$\times F\left(\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\,\xi^2}}\right)d\xi\,\frac{\eta\,d\eta}{\sqrt{\eta^2-v_3^2-\cdots-v_n^2}}\,dv_3\cdots dv_n.$$

由于

$$\int_{\substack{v_3^2+\cdots+v_n^2<\eta^2\\ v_3>0,\cdots,v_n>0}}\cdots\int\frac{dv_3\cdots dv_n}{\sqrt{\eta^2-v_3^2-\cdots-v_n^2}}=\frac{\eta^{n-3}}{2^{n-2}}\int_{v_3^2+\cdots+v_n^2<1}\cdots\int\frac{dv_3\cdots dv_n}{\sqrt{1-v_3^2-\cdots-v_n^2}}$$

$$=\frac{\eta^{n-3}}{2^{n-2}}\frac{\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)},$$

可得

$$I=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}\,2^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)(f+n)}\frac{\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\int_0^\infty\int_0^\infty(1+\xi^2+\eta^2+2\eta)^{-(f+n)}\times$$

$$\times[(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\,\xi^2]^{\frac{1}{2}f}F\left(\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\,\xi^2}}\right)\eta^{n-2}\,d\xi\,d\eta$$

$$=\frac{2^n\,\pi^{n-1}}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_0^\infty\int_0^\infty(1+\xi^2+\eta^2+2\,\eta)^{-(f+n)}[(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\,\xi^2]^{\frac{1}{2}f}\times$$

$$\times F\left(\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\,\xi^2}}\right)\eta^{n-2}\,d\xi\,d\eta$$

(此处用了习知公式 $\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x)\cdot 2^{1-2x}$).

注意

$$(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2=(1+\xi^2+\eta^2)^2-4\eta^2.$$

換变数

$$\tau=\frac{1+\xi^2+\eta^2}{2\eta},$$

立得

$$\frac{1+\eta^2}{2\eta}\leqslant\tau\leqslant\infty$$

及

$$d\tau=\frac{\xi}{\eta}\,d\xi,\qquad d\xi=\frac{\eta\,d\tau}{\sqrt{2\eta\tau-1-\eta^2}}.$$

故

$$I=\frac{2^n\pi^{n-1}}{(f+n)\,\Gamma(n-1)}\int_0^\infty d\eta\int_{(1+\eta^2)/2\eta}^\infty 2^{-n}\eta^{-1}(\tau+1)^{-(f+n)}(\tau^2-1)^{\frac{1}{2}f}\times$$

$$\times F\left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{2\eta\tau-1-\eta^2}}.$$

由于

$$\int_{2\eta\tau-1-\eta^2>0}\frac{d\eta}{\eta\sqrt{2\eta\tau-1-\eta^2}}=\pi,$$

故可知

$$I=\frac{\pi^n}{(f+n)\,\Gamma(n-1)}\int_1^\infty(\tau+1)^{-(f+n)}(\tau^2+1)^{\frac{1}{2}f}F\left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}\right)d\tau. \tag{7.6.3}$$

§7.7. (7.6.3) 式的另一形式

命

$$t=\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}},\qquad d\tau=-(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt,$$

故 (7.6.3) 变为

$$I=\frac{\pi^n}{(f+n)\,\Gamma(n-1)}\int_1^\infty\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{-(f+n)}(t^2-1)^{\frac{1}{2}(n-3)}F(t)\,dt. \tag{7.7.1}$$

为了証明 (7.5.4), 我們只須証明

$$\int_1^\infty\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{-(2l+m+n)}(t^2-1)^{\frac{1}{2}(n-3)}P_m^{(\frac{1}{2}n-1)}(t)\,dt$$

$$=\frac{(2l+m+n)\,(n-2)}{2^n}\;\frac{l!\,(n-3+m)!\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n+l\right)}{m!\,\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(m+n+l)}. \tag{7.7.2}$$

由 Rodrique 公式

$$(1-t^2)^{\frac{1}{2}(n-3)} P_m^{(\frac{1}{2}n-1)}(t)$$

$$=\frac{(-2)^m}{m!}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n-1\right)\Gamma(m+n-2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)\Gamma(2m+n-2)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m(1-t^2)^{m+\frac{1}{2}(n-3)}$$

可知 (7.7.2) 与公式

$$\int_1^\infty (t+\sqrt{t^2-1})^{-(2l+m+n)}\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t^2-1)^{m+\frac{1}{2}(n-3)}\,dt$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2^{m+n-1}}\frac{(2l+m+n)\,l!\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n+l\right)\Gamma(2m+n-2)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(m+n+l)\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n-1\right)} \tag{7.7.3}$$

等价．表面上看来，此式无特殊函数，但直接求証似乎并不容易．

命

$$t=\cosh x,$$

则 (7.7.1) 变为

$$I=\frac{\pi^n}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_0^\infty e^{-(f+n)x}(\sinh x)^{n-2}F(\cosh x)\,dx. \tag{7.7.4}$$

故 (7.5.4) 与公式

$$\int_0^\infty e^{-(m+n+2l)x}\sinh^{n-2}x\,P_m^{(\frac{1}{2}n-1)}(\cosh x)\,dx$$

$$=\frac{(2l+m+n)(n-2)}{2^n}\frac{l!\,(n-3+m)!\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n+l\right)}{m!\,\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(m-n+l)} \tag{7.7.5}$$

等价．

§ 7.8. (7.7.5) 的証明

用符号

$$a_q=a(a+1)\cdots(a+q-1).$$

显然有

$$\frac{\Gamma(a+q)}{\Gamma(q)}=a_q,\qquad \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-q)}=(-1)^q(1-a)_q$$

及

$$2^{-2q}\frac{\Gamma(a+2q)}{\Gamma(a)}=\left(\frac{1}{2}a\right)_q\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)_q.$$

又由超几何級数 (Bailey [1], 8 頁) 的定义可知，当 $|z|<1$ 时，級数

$$ {}_{p+1}F_p\begin{bmatrix}\alpha_1, \cdots, \alpha_{p+1}; z\\ \beta_1, \cdots, \beta_p\end{bmatrix} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_q \cdots (\alpha_{p+1})_q}{q!\,(\beta_1)_q \cdots (\beta_p)_q} z^q $$

絕对收斂.

引理 1. 当 $s > l$ 时

$$ \int_0^\infty e^{-xs} (\sinh x)^l \, dx = \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-l)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+l)\right)}. $$

証：命 $e^{-sx} = y$，此积分等于

$$ \frac{1}{2^l} \int_0^\infty e^{-x(s-l)} (1-e^{-2x})^l \, dx = \frac{1}{2^{l+1}} \int_0^1 y^{\frac{1}{2}(s-l)-1} (1-y)^l \, dy $$

$$ = \frac{1}{2^{l+1}} \frac{\Gamma(l+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-l)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+l)+1\right)}. $$

引理 2. 当 $s > l$ 时

$$ \int_0^\infty e^{-xs} \cosh x (\sinh x)^l \, dx = s \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-l)-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+l)+\frac{3}{2}\right)}. $$

証：由引理 1，上一积分等于

$$ \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-x(s-1)}) (\sinh x)^l \, dx + \int_0^\infty e^{-x(s+1)} (\sinh x)^l \, dx\right) $$

$$ = \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1-l)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1+l)+1\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1-l)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1+l)+1\right)} \right) $$

$$ = \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-l)-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+l)+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}(s+l)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(s-l)-\frac{1}{2}\right). $$

引理 3. 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p+1}$ 中有一个是負整数，則

$$ \int_0^\infty e^{-xs} (\sinh x)^{2\lambda} {}_{p+1}F_p\begin{bmatrix}\alpha_1, \cdots, \alpha_{p+1}; -\sinh^2 x\\ \beta_1, \cdots, \beta_p\end{bmatrix} dx $$

$$ = \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)} {}_{p+3}F_{p+2}\begin{bmatrix}\alpha_1, \cdots, \alpha_{p+1}, \lambda+\frac{1}{2}, \lambda+1; 1\\ \beta_1, \cdots, \beta_p, \frac{1}{2}s+\lambda+1, 1+\lambda-\frac{1}{2}s\end{bmatrix}. $$

証：把超几何函数的級数表示式代入此式之左边，經积分后的公項等于

$$(-1)^q \frac{(\alpha_1)_q\cdots(\alpha_{p+1})_q}{q!\,(\beta_1)_q\cdots(\beta_p)_q}\int_0^\infty e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda+2q}\,dx$$

$$=(-1)^q \frac{(\alpha_1)_q\cdots(\alpha_{p+1})_q}{q!\,(\beta_1)_q\cdots(\beta_p)_q}\frac{\Gamma(2\lambda+2q+1)}{2^{2\lambda+2q+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda-q\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+q+1\right)}$$

$$=\frac{(\alpha_1)_q\cdots(\alpha_{p+1})_q}{q!\,(\beta_1)_q\cdots(\beta_p)_q}\frac{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_q(\lambda+1)_q}{\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)_q\left(1+\lambda-\frac{1}{2}s\right)_q}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)}.$$

故得引理.

习知，对任一偶整数 2ν (Szegö [1]，84 頁)，常有

$$P_{2\nu}^{(\lambda)}(x)=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\,{}_2F_1\begin{pmatrix}-\nu, & \nu+\lambda, & 1-x^2\\ & \lambda+\frac{1}{2} & \end{pmatrix}.$$

由引理 3 可知

$$\int_0^\infty e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda}P_{2\nu}^{(\lambda)}(\cosh x)\,dx$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\int_0^\infty e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda}\,{}_2F_1\begin{bmatrix}-\nu, & \nu+\lambda, & -\sinh^2 x\\ & \lambda+\frac{1}{2}, & \end{bmatrix}dx$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)}\,{}_4F_3\begin{bmatrix}-\nu, & \nu-\lambda, & \lambda+\frac{1}{2}, & \lambda+1; & 1\\ \lambda+\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}s+\lambda+1, & 1+\lambda-\frac{1}{2}s & & \end{bmatrix}$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)}\,{}_3F_2\begin{bmatrix}-\nu, & \nu-\lambda, & \lambda+1, & 1\\ \frac{1}{2}s+\lambda+1, & 1+\lambda-\frac{1}{2}s & & \end{bmatrix},$$

此处 ${}_3F_2$ 适合于 Saalschütz 条件 (Bailey [3]，9 頁)，即 $a+b+c+1=d+e$，且 a, b, c 中有一个負整数．已知对适合于 Saalschütz 条件的超几何級数有

$${}_3F_2\begin{bmatrix}a, b, c, 1\\ d, e\end{bmatrix}=\frac{\Gamma(d)\,\Gamma(1+a-e)\,\Gamma(1+b-e)\,\Gamma(1+c-e)}{\Gamma(1-e)\,\Gamma(d-a)\,\Gamma(d-b)\,\Gamma(d-c)},$$

故

$$\int_0^\infty e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda}P_{2\nu}^{(\lambda)}(\cosh x)\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)} \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda\right)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\lambda-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\lambda+\mu+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\nu+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}.$$

此即 (7.7.5) 当 m 为偶数 2ν 的情形.

引理 4. 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}$ 中有一个是負整数，則

$$\int_0^\infty e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda}\,{}_{p+1}F_p\begin{bmatrix}\alpha_1, & \cdots, & \alpha_{p+1}; & -\sinh^2 x\\ & \beta_1, & \cdots, & \beta_p\end{bmatrix}\cosh x\,dx$$

$$= s\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)}\,{}_{p+3}F_{p+2}\begin{bmatrix}\alpha_1, \cdots, \alpha_{p+1}, \lambda+\frac{1}{2}, \lambda+1;\ 1\\ \beta_1, \cdots, \beta_p, \lambda-\frac{1}{2}s+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}s+\frac{3}{2}+\lambda\end{bmatrix}.$$

証：写下 ${}_{p+1}F_p$ 的級数展开式，乘以 $e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda}$ 再逐項求积分，得一級数其公項是

$$(-1)^q\frac{(\alpha_1)_q\cdots(\alpha_{p+1})_q}{(\beta_1)_q\cdots(\beta_p)_q}\frac{\Gamma(2\lambda+2q+1)}{2^{2\lambda+2q+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda-q\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda+q\right)}$$

$$= s\frac{(\alpha_1)_q\cdots(\alpha_{p+1})_q}{(\beta_1)_q\cdots(\beta_p)_q}\frac{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_q(\lambda+1)_q}{\left(\lambda-\frac{1}{2}s+\frac{3}{2}\right)_q\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)_q}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)},$$

故得引理.

当 $m=2\nu+1$ 是一奇整数时

$$P_{2\nu+1}^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!\,\Gamma(2\lambda)}x\,{}_2F_1\begin{pmatrix}-\nu, & \nu+\lambda+1; & 1-x^2\\ & \lambda+\frac{1}{2} & \end{pmatrix}.$$

由引理 4 可知

$$\int_0^\infty e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda}P_{2\nu+1}^{(\lambda)}(\cosh x)\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!\,\Gamma(2\lambda)}\int_0^\infty e^{-xs}(\sinh x)^{2\lambda}\,{}_2F_1\begin{pmatrix}\nu, & \nu+\lambda+1; & -\sinh^2 x\\ & \lambda+\frac{1}{2} & \end{pmatrix}\cosh x\,dx$$

$$
= \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!\,\Gamma(2\lambda)} \frac{s\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)} \times
$$

$$
\times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix} -\nu,\ \nu+\lambda+1,\ \lambda+\frac{1}{2},\ \lambda+1;\ 1 \\ \lambda+\frac{1}{2},\ \lambda-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}+\frac{s}{2}+\lambda \end{matrix}\right)
$$

$$
= \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)\,s\lambda}{(2\nu+1)!\,2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -\nu,\ \nu+\lambda+1,\ \lambda+1;\ 1 \\ \frac{1}{2}(s+3)+\lambda,\ \lambda-\frac{3}{2}+\frac{3}{2} \end{matrix}\right)
$$

$$
= \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!} \frac{s\lambda}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda\right)} \times
$$

$$
\times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-1)-\lambda-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1)+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+3)+\lambda+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1)-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1)\right)},
$$

此处又用到了 Saalschütz 定理．故得 (7.7.5)．

附录一. 一些等式

(本附录中列举一些本书中用到的初等工具,其目的在于: (i) 这些工具可能在其他方面有用; (ii) 可以作为大学二、三年級同学的課外习題.)

1°. 命 $D(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)$, 则有恆等式

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\delta_{i_1,\cdots,i_n}^{1,\cdots,n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}^2)(1-x_{i_1}^2x_{i_2}^2)\cdots(1-x_{i_1}^2x_{i_2}^2\cdots x_{i_n}^2)}$$

$$=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-x_ix_j)},$$

此处 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 乃由 $1,2,\cdots,n$ 之排列而得. 若 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的偶排列, 则 $\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{1,2,\cdots,n}=1$; 若是奇排列,则 $\delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{1,2,\cdots,n}=-1$.

2°. 又有恆等式

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\delta_{i_1,\cdots,i_n}^{1,\cdots,n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\cdots x_{i_{n-1}}^{1}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\cdots(1-x_{i_1}\cdots x_{i_{2\nu}})}$$

$$=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)},$$

此处 ν 表 $\frac{1}{2}n$ 的整数部分.

3°.

$$\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_n=m\\ l_\nu\geqslant 0}}\frac{[D(l_1,\cdots,l_n)]^2}{l_1!\cdots l_n!}=n^{m-\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{n!(n-1)!\cdots 1!}{\left(m-\frac{1}{2}n(n-1)\right)!}.$$

4°. 設

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$$

表一当 $|z|<\rho$ 时收斂的冪級数. 当 $|x_jy_k|<\rho$ 时,

$$\begin{vmatrix} f(x_1y_1),\cdots, & f(x_1y_n)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ f(x_ny_1),\cdots, & f(x_ny_n)\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant 0}a_{l_1}\cdots a_{l_n}\begin{vmatrix} x_1^{l_1},\cdots, & x_1^{l_n}\\ \cdots & \cdots\\ x_n^{l_1},\cdots, & x_n^{l_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_1^{l_1},\cdots, & y_1^{l_n}\\ \cdots & \cdots\\ y_n^{l_1},\cdots, & y_n^{l_n}\end{vmatrix}.$$

5°. 設 $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ 是 n 个具有我們所需要的微分次数的函数，则有

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x}} \frac{\begin{vmatrix} f_1(x_1), \cdots, f_n(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1(x_n), \cdots, f_n(x_n) \end{vmatrix}}{D(x_1, \cdots, x_n)}$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2!\cdots(n-1)!} \begin{vmatrix} f_1(x), & \cdots, & f_n(x) \\ f_1'(x), & \cdots, & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x), & \cdots, & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

6°. 当 $\alpha > \frac{1}{2}n$ 时，有

$$\int_T \cdots \int \frac{\dot{T}}{(\det(1 + T^2))^\alpha} = 2^{\frac{1}{4}n(n-1)} \pi^{\frac{1}{4}n(n+1)} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}n\right)}{\Gamma(\alpha)} \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{1}{2}(n+\nu)\right)}{\Gamma(2\alpha - \nu)},$$

此处 T 过所有的 n 行列的实对称方陣，$T = (t_{jk})$，$\dot{T} = 2^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{i<k} dt_{jk}$.

7°. 当 $n \geqslant 2$ 及 $\alpha > \frac{1}{4}(2n-3)$ 时，有

$$\int_K \cdots \int \frac{\dot{K}}{(\det(I + KK'))^\alpha}$$

$$= 2^{\frac{1}{4}n(n-1)} \pi^{\frac{1}{4}n(n-1)} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\Gamma\left(2\alpha - n + \frac{1}{2}(\nu+1)\right)}{\Gamma(2\alpha - n + \nu)},$$

此处 K 过所有的 n 行列的实对称方陣，$K = (k_{ij})$，$\dot{K} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i<j} dk_{ij}$.

8°. 当 $\alpha > n - \frac{1}{2}$ 时，有

$$\int_H \cdots \int \frac{\dot{H}}{(\det(I + H^2))^\alpha} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \pi^{\frac{1}{2}n^2} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\alpha - j - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha - j)} \prod_{k=0}^{n-2} \frac{\Gamma(2\alpha - n - k)}{\Gamma(2\alpha - 2k - 1)},$$

此处 H 过所有的 Hermite 方陣 (h_{jk})，$h_{jj} = h_j$，$h_{jk} = h'_{jk} + ih''_{jk}$ $(j \neq k)$ 及

$$\dot{H} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} dh_j \prod_{j<k} dh'_{jk}\, dh''_{jk}.$$

9°. Z 是 $m \times n$ 复数元素的矩陣. 当 $\lambda > -1$ 时，有

$$\int_{I-Z\bar{Z}'>0}\cdots\int \det(I-Z\bar{Z}')^{\lambda}\dot{Z}=\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\lambda+j)\prod_{k=1}^{m}\Gamma(\lambda+k)}{\prod_{l=1}^{n+m}\Gamma(\lambda+l)}\pi^{mn},$$

此处 $Z=(z_{jk})$, $z_{jk}=x_{jk}+iy_{jk}$, $\dot{Z}=\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}dx_{jk}\,dy_{jk}$.

10°. Z 是复数元素的对称方阵. 当 $\lambda>-1$ 时,有

$$\int_{I-Z\bar{Z}>0}\cdots\int (\det(I-Z\bar{Z}))^{\lambda}\dot{Z}$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda+3)\Gamma(2\lambda+5)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-1)}{\Gamma(2\lambda+n+2)\Gamma(2\lambda+n+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2n)},$$

此处 $\dot{Z}=\prod_{j\leqslant k}dx_{jk}\,dy_{jk}$.

11°. 命 $n\geqslant 2$, Z 是 $n\times n$ 复数元素的斜对称方阵. 当 $\lambda>-\frac{1}{2}$ 时,有

$$\int_{I+Z\bar{Z}>0}\cdots\int \det(I+Z\bar{Z})^{\lambda}\dot{Z}=\pi^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{\Gamma(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda+3)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-3)}{\Gamma(2\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n+1)\cdots\Gamma(2\lambda+2n-2)},$$

此处 $\dot{Z}=\prod_{j<k}dx_{jk}\,dy_{jk}$.

12°. 当 $\alpha>-1$, $\beta>-(n+\alpha)$ 时,有

$$\int_{\substack{|zz'|^2+1-2\bar{z}z'>0\\|zz'|<1}}\cdots\int \left(1-\bar{z}z'-\sqrt{(\bar{z}z')^2-|zz'|^2}\right)^{\alpha}\left(1-\bar{z}z'+\sqrt{(\bar{z}z')^2-|zz'|^2}\right)^{\beta}\dot{z}$$

$$=\frac{\pi^n}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{\alpha+\beta+n}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)},$$

此处 $z=(z_1,\cdots,z_n)$, $z_j=x_j+iy_j$, $\dot{z}=\prod_{j=1}^{n}dx_j\,dy_j$.

13°.

$$\int_{U\bar{U}'=I}\cdots\int\frac{\dot{U}}{|\det(I-Z\bar{U}')|^{2n}}=\frac{(2\pi)^{mn-\frac{1}{2}m(m-1)}}{(n-m)!\cdots(n-1)!}\det(I-Z\bar{Z}')^{-n},$$

此处 Z 与 U 皆是 $m\times n$ 复数矩陣, $\dot{U}$ 表在流形 $U\bar{U}'=I$ 上之体积元素.

14°.

$$\int_{U\bar{U}=I}\cdots\int\frac{\dot{U}}{|\det(I-Z\bar{U})|^{n+1}}$$

$$=2^{\frac{n(3n+1)}{4}}\pi^{\frac{1}{4}n(n+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1-\nu)}\det(I-Z\bar{Z})^{-\frac{1}{2}(n+1)},$$

此处 Z 与 U 皆是 $n\times n$ 复数对称方陣，$\dot{U}$ 表流形 $U\bar{U}=I$ 之体积元素.

15°. Z 与 K 皆是 $n\times n$ 复数斜对称方陣. 当 n 是偶数时

$$\int\cdots\int_{K\bar{K}'=I}\frac{\dot{K}}{|\det(I+Z\bar{K})|^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{((\nu-1)!)^2}{2^{(\nu-1)^2}}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)}\prod_{\alpha=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{2}(n-1)},\quad \nu=\left[\frac{n}{2}\right],$$

此处 $\dot{K}$ 表流形 $K\bar{K}'=I$ 之体积元素；当 n 是奇数时

$$\int\cdots\int_{K}\frac{\dot{K}}{|\det(I-Z\bar{K})|^{n-1}}=2^{-\nu}\frac{((\nu-1)!)^2}{2^{(\nu-1)^2}}(8\pi)^{\frac{1}{4}n(n-1)}\prod_{\alpha=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\det(I+Z\bar{Z})^{-\frac{1}{2}(n-1)},$$

此处 K 过所有形如

$$K=\Gamma\left[\begin{pmatrix}0 & e^{i\theta_1}\\ -e^{i\theta_1} & 0\end{pmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{pmatrix}0 & e^{i\theta_\nu}\\ -e^{i\theta_\nu} & 0\end{pmatrix}\dotplus 0\right]\Gamma'$$

之方陣，Γ 是任意的实正交方陣.

16°.

$$\int\cdots\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}}\frac{\dot{\xi}}{|(z-\xi)(z-\xi)'|^n}=\frac{2\pi^{\frac{1}{2}n+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}(1+|zz'|^2-2\bar{z}z')^{-\frac{1}{2}n},$$

此处 $z=(z_1,\cdots z_n)$，$\xi=e^{i\theta}(x_1,\cdots,x_n)$，$\dot{\xi}$ 是流形

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\qquad x_1^2+\cdots+x_n^2=1$$

之体积元素.

17°.

$$\int\cdots\int_{\pi>\theta_1>\cdots>\theta_n>-\pi}\frac{1}{\left|\prod_{j=1}^{n}(1-re^{-i\theta_j})\right|^{2n}}\prod_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2d\theta_1\cdots d\theta_n$$

$$=\frac{1!\,2!\cdots(n-1)!}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}(1-r^2)^{-n^2}\qquad(r<1).$$

18°.

$$\int_1^\infty(t+\sqrt{t^2-1})^{-(2l+m+n)}\left(\frac{d}{dt}\right)^m(t^2-1)^{m+\frac{1}{2}(n-3)}dt$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{2^{m+n-1}}\frac{(2l+m+n)l!\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n+l\right)\Gamma(2m+n-2)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}n+1\right)\Gamma(m+n+l)\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}n-1\right)}.$$

附录二. 矩陣坐标变换公式

1°. 命 U 代表酉方陣, H 是爱尔米方陣; $\dot{U}$ 表酉方陣所成的空間之体积元素, $\dot{H}$ 表爱尔米方陣所成空間的体积元素,則此二空間除較低維的流形外,在变換

$$U=(I+iH)(I-iH)^{-1}$$

之下是一一对应的,并且其体积元素間有以下的关系:

$$\dot{U}=2^{n^2}\det(I+H^2)^{-n}\dot{H}.$$

2°. 任一酉方陣 U 可以表成

$$U=V\Lambda\bar{V}', \qquad \Lambda=[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}], \qquad 2\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant 0,$$

此处 V 是酉方陣. 如命 $\mathfrak{U}_n$ 表酉方陣所成之羣,則所有 $\Lambda=[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]$ 形的酉方陣成 $\mathfrak{U}_n$ 的一个子羣. $\mathfrak{U}_n$ 对这个子羣的左傍系的集合命之为 $[\mathfrak{U}_n]$, $[\mathfrak{U}_n]$ 也成一空間,其体积元素以 $[\dot{U}]$ 表之,則有

$$\dot{U}=[\dot{U}]\prod_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2\,d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

3°. 任一爱尔米方陣 H 可以表成

$$H=U\Lambda\bar{U}', \qquad \Lambda=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n], \qquad \lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n,$$

此处 U 是酉方陣. 于是

$$\dot{H}=[\dot{U}]\prod_{j<k}(\lambda_j-\lambda_k)^2\,d\lambda_1\cdots d\lambda_k.$$

4°. 命 Z 是任意复数方陣,这些方陣所成的空間的体积元素以 $\dot{Z}$ 表之. Z 可以表为

$$Z=U\Lambda V, \qquad \Lambda=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n], \qquad \lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0,$$

此处 U 与 V 皆是酉方陣. 于是

$$\dot{Z}=[\dot{U}]\dot{V}\prod_{j<k}(\lambda_j-\lambda_k)^2\,d\lambda_1\cdots d\lambda_n.$$

5°. 任一对称的复数方陣 Z 可以表为

$$Z=U\Lambda U', \qquad \Lambda=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n], \qquad \lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0,$$

此处 U 是酉方陣. 以 Z 表复数对称方陣所成之体积元素. 酉羣 $\mathfrak{U}_n$ 的元素 $[\pm 1,\cdots,\pm 1]$ 成一子羣, $\mathfrak{U}_n$ 对此子羣之左傍系命之为 $\{\mathfrak{U}_n\}$, $\{\mathfrak{U}_n\}$ 之体积元素命之为 $\{\dot{U}\}$. 于是

$$\dot{Z}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{j<k}|\lambda_j^2-\lambda_k^2|\,\lambda_1\cdots\lambda_n\,d\lambda_1\cdots d\lambda_n\{\dot{U}\}.$$

6°. 实的对称方陣 T 所成的空間与对称的酉方陣 S 所成的空間除較低維的流形外，在变換

$$S=(I+iT)(I-iT)^{-1}$$

之下是一一对应的，并且

$$\dot{S}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}\det(I+T^2)^{-\frac{n+1}{2}}\dot{T}.$$

7°. 命 K 是能表为下列形式:

$$K=\Gamma F\Gamma'$$

的斜对称方陣，此处 Γ 是行列式为 1 之实正交方陣，它們所成之羣以 O_n^+ 表之.

$$F=\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & e^{i\theta_1}\\ -e^{i\theta_1} & 0\end{pmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{pmatrix}0 & e^{i\theta_\nu}\\ -e^{i\theta_\nu} & 0\end{pmatrix}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;}\\ \begin{pmatrix}0 & e^{i\theta_1}\\ -e^{i\theta_1} & 0\end{pmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{pmatrix}0 & e^{i\theta_\nu}\\ -e^{i\theta_\nu} & 0\end{pmatrix}\dotplus 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数时,}\end{cases}$$

此处 $2\pi\geqslant\theta_1\geqslant\cdots\geqslant\theta_\nu\geqslant 0,\quad \nu=\left[\frac{n}{2}\right]$.

命 Δ 为所有公式:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{pmatrix}\cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu\\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu\end{pmatrix}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;}\\ \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{pmatrix}\cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu\\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu\end{pmatrix}\dotplus 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\end{cases}$$

的实正交方陣所成之羣；以 Σ 代表 O_n^+ 对子羣 Δ 之左傍系，$\dot{\Sigma}$ 为其体积元素，则

$$\dot{K}=a\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha)\,d\theta_1\cdots d\theta_\nu\,\dot{\Sigma},$$

其中

$$a=\begin{cases}2^{2\nu(\nu-1)+\frac{1}{2}\nu}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;}\\ 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{3}{2}\nu}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.}\end{cases}$$

8°. 空間 O_n^+ 与实斜对称方陣 K 所成的空間除較低維的流形外，在变換

$$\Gamma=(I-K)(I+K)^{-1}$$

之下是一一对应的，并有

$$\dot{\Gamma}=2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\det(I-K^2)^{-\frac{1}{2}(n-1)}\dot{K}.$$

参 考 文 献

华罗庚

[1] On the theory of automorphic functions of a matrix variables I-Geometrical basis, Amer. J. Math., 66(1944), 470—488.

[2] On the theory of automorphic functions of a matrix variables II-The classification of hypercircles under the symplectic group, Amer. J. Math., **66**(1944), 531—563.

[3] On the theory of Fuchsian functions of several variables, Annals of Math., **47**(1946), 167—191.

[4] 多复变数函数論 I—矩陣双曲空間的一完整正交函数系,数学学报, **3** (1953), 288—323.

[5] 多复变数函数論 II—超球双曲空間的一完整正交函数系,数学学报, **5** (1955), 1—25.

[6] 多复变数函数論 III—对称方陣及斜对称方陣双曲空間的完整正交函数系,数学学报, **5** (1955), 205—242.

[7] 一些定积分,数学学报, **6** (1956), 302—312.

[8] 一个偏微分方程組,科学記录, **1** (1957), 339—340.

华罗庚与陸启鏗

[1] 关于奇数行列斜对称方陣双曲空間的 Cauchy 公式,科学記录, **1** (1958), 19—21.

[2] 典型域的調和函数論(将发表).

Фукс, Б. А.

[1] Теория аналитических функций многих комплексных переменных, ОГИЗ, 1948, Москва.

Понтрягин, М. Г.

[1] Непрерывные группы, ОГИЗ, 1954, Москва-Ленинград.

Bailey, W. N.

[1] Generalized hypergeometric series, Cambridge tracts, No. 32, 1935.

Bergmann, S.

[1] Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec des applications à la théorie des fonctions analytiques, Gauthier-Villars, 1947, Paris.

Bochner, S.

[1] Group invariants of Cauchy's formula in several variables, Ann. of Math., **45** (1944), 686—707.

Borel, A.

[1] Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes, Bull. Soc. Math. France, **80** (1952), 167—182.

Cartan, E.

[1] Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, Hamburg. Univ. Math. sem. Abhandl., **11**(1936), 106—162.

Cartan, H.

[1] Sur les fonctions de deux variables complexes et problème de la représentative analytique, J. Math. pures et appl., **10**(1931), 1—114.

Mitchell, J.

[1] The kernel function in the geometry of matrices, Duke Math., **2**, 19(1952), 575—583.

[2] Potential theory in the geometry of matrices, Trans. Amer. Soc., 79(1955), 401—422.

Murnaghan, F. D.

[1] The theory of group representations, 1938.

Thrall, R. M.

[1] On symmetrized Kronecker powers and the structure of the free Lie ring, Amer. Tous. of Math., 64(1942), 371—384.

Szegö, G.

[1] Orthogonal polynomials, 1938.

Weil, A.

[1] L'intégration dans les groups topologiques et ses applications, Hermann, 1940, Paris.

Weyl, H.

[1] Harmonics on homogeneous manifolds, Ann. of Math., 35(1934), 486—499.

[2] The classical groups, 1946.